# Annales de la Faculté des sciences de Toulouse

Faculté des sciences de Toulouse





# ANNALES

DE LA

# FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.



# ANNALES

DE LA

# FACULTÉ DES SCIENCES

## DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ,

SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DE LA MUNICIPALITÉ DE TOULOUSE,

AVEC LE CONCOURS

DES CONSEILS GÉNÉRAUX DE LA HAUTE-GARONNE ET DES HAUTES-PYRÉNÉES.

---

## TOME II. – ANNÉE 1888.

---



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1888

SUR LES

# LIGNES ASYMPTOTIQUES DE CERTAINES SURFACES GAUCHES,

PAR M. CH. BIOCHE,

Professeur agrégé au Lycée de Douai

1. On peut déterminer la position d'un point sur une surface réglée par deux coordonnées $r$ et $s$ dont la première représente le segment de génératrice compris entre le point considéré et le point central, la seconde étant l'arc de la ligne de striction compté à partir d'une origine arbitraire et limité à ce point central. L'équation différentielle des lignes asymptotiques peut s'obtenir facilement en écrivant que les plans osculateurs de ces lignes sont tangents à la surface. Si l'on appelle $\theta$ l'angle que la génératrice en un point fait avec la ligne de striction, K le paramètre correspondant, $\Omega$ la courbure de la section normale tangente à la ligne de striction (ces trois quantités étant des fonctions de l'arc $s$), l'équation des asymptotiques est

$$(1) \qquad 2K\sin\theta\frac{dr}{ds} + K^2(\Omega - K\sin\theta\cos\theta)r^2 + \sin\theta\frac{dK}{ds}r + \Omega = 0.$$

Le coefficient de $r^2$ est nul pour les surfaces à plan directeur.

On déduit de cette équation que, pour les surfaces à plan directeur, on a, en appelant $r$ et $r'$ deux solutions,

$$K(r - r')^2 = \text{const}.$$

Si K est constant, les segments déterminés par deux lignes asymptotiques sur les génératrices sont égaux (M. Paul Serret).

Les lignes asymptotiques des surfaces à plan directeur et à paramètre de distribution constant, que j'appellerai, pour abréger, *surfaces* (S), ont une relation simple avec les trajectoires orthogonales des génératrices. En effet, pour ces surfaces, si l'on remarque que, dans ce cas,

$$\Omega = K\sin\theta\cos\theta,$$

l'équation (1) se réduit à

$$2\frac{dr}{ds}+\cos\theta=0,$$

tandis que l'équation des trajectoires orthogonales se trouve être

$$\frac{dr}{ds}+\cos\theta=0.$$

Donc, dans ces surfaces, *les asymptotiques sont les lieux des milieux des segments compris entre la ligne de striction et les trajectoires orthogonales.*

2. Cherchons l'équation générale des surfaces (S). Une surface à plan directeur peut se représenter par les équations

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = F(\alpha), \qquad \alpha=\varphi(z);$$

son paramètre de distribution est donné par

$$K=\frac{d\alpha}{dz}.$$

D'autre part, si l'on appelle $\sigma$ l'arc de la projection de la ligne de striction sur le plan directeur et $\rho$ le rayon de courbure de cette projection, on a

$$\frac{d\sigma}{d\alpha}=\rho,$$

et, par suite, en appelant $\theta$ l'angle de la génératrice avec la ligne de striction, ou de la ligne de striction avec le plan directeur,

$$K\rho=\cot\theta.$$

Ce qui précède montre que l'équation générale des surfaces (S) est

$$(1) \qquad y\cos Kz - x\sin Kz = F(z),$$

et que, en outre, une surface (S) est complètement déterminée si l'on donne la projection de sa ligne de striction sur le plan directeur. En particulier, si la projection est un cercle, la ligne de striction est une hélice, et réciproquement; l'équation de la surface peut alors s'écrire

$$y\cos Kz - x\sin Kz = a,$$

le signe de K donnant le sens de l'enroulement de l'hélice.

En général, si l'équation tangentielle de la projection de la ligne de striction est

$$(2) \qquad f(u, v, w) = 0,$$

l'équation de la surface (S) correspondante est

$$f(\sin K z, -\cos K z, y\cos K z - x \sin K z) = 0.$$

Elle s'obtient en identifiant l'équation (1) avec

$$ux + vy + w = 0$$

et en éliminant $u$, $v$, $w$, $F(z)$ entre les équations de condition et les équations (1) et (2).

3. Le théorème donné précédemment sur les lignes asymptotiques permet d'obtenir l'équation de ces lignes en coordonnées cartésiennes, car leur équation peut s'écrire, en remarquant que $ds \cos\theta = d\sigma$,

$$2\,dr + d\sigma = 0;$$

d'autre part, on trouve facilement

$$d\sigma = -K\left[F(z) + \frac{1}{K^2}F''(z)\right]dz.$$

Et si l'on écrit l'équation d'une surface (S) en mettant en évidence la ligne de striction

$$\frac{y - F(z)\cos K z + \frac{1}{K}F'(z)\sin K z}{\sin z} = \frac{x + F(z)\sin K z + \frac{1}{K}F'(z)\cos K z}{\cos z},$$

la valeur commune de ces fractions étant la distance du point $(x, y, z)$ au point central correspondant, pour avoir les équations des asymptotiques, il suffit d'égaler ces fractions à

$$\frac{1}{2}\int\frac{d\sigma}{dz}dz = \frac{1}{2}\int\left[F(z) + \frac{1}{K^2}F''(z)\right]K\,dz = \frac{1}{2}\int F(z)K\,dz + \frac{1}{2K}F'(z) + \text{const.},$$

ce qui donne l'équation générale des asymptotiques

$$\frac{y - F(z)\cos K z}{\sin z} = \frac{x + F(z)\sin K z}{\cos z} = \frac{1}{2}\int F(z)K\,dz - \frac{1}{2K}F'(z) + \text{const.}$$

En particulier, il existe des surfaces (S) dont une ligne asymptotique du second système est rectiligne; si les équations de cette droite sont

$$x = 0, \qquad y = mz,$$

la surface correspondante est

$$y \cos Kz - x \sin Kz = mz \cos Kz.$$

La ligne de striction de cette surface, qui est donnée par les équations

$$x = -\frac{m}{K} \cos^2 Kz, \qquad y = m\left(z - \frac{\sin Kz \cos Kz}{K}\right),$$

a pour projection sur le plan directeur une cycloïde. Le cercle qui donne cette cycloïde a pour rayon $\frac{m}{2K}$ et roule sur la droite $x = -\frac{m}{K}$. La tangente aux sommets est donc la projection de la directrice rectiligne.

4. Parmi les surfaces (S), il y en a qui admettent pour trajectoire oblique des génératrices une des lignes asymptotiques. Je vais déterminer ces surfaces. Si l'on pose

$$F(z) + F''(z) = 2\varphi'(z),$$

les coefficients directeurs de la tangente à une asymptotique peuvent s'écrire, en faisant, pour abréger, $K = 1$,

$$\frac{dx}{dz} = -[\varphi(z) \sin z + \varphi'(z) \cos z],$$

$$\frac{dy}{dz} = -[\varphi'(z) \cos z - \varphi(z) \sin z]$$

si l'on fait rentrer dans la fonction $\varphi(z)$ la constante correspondant à la ligne asymptotique considérée. On en déduit, en appelant $m$ la cotangente de l'angle de cette courbe avec les génératrices,

$$m = \frac{\varphi'(z)}{\sqrt{\varphi^2(z) + 1}} = \frac{d}{dz} \log\left[\varphi(z) + \sqrt{\varphi^2(z) + 1}\right]:$$

on tire de là

$$2\varphi(z) = e^{mz} - e^{-mz}$$

et, par suite, en intégrant l'équation qui lie F et $\varphi$,

$$F(z) = A \cos z + B \sin z + \frac{m}{m^2 + 1}(e^{mz} + e^{-mz}).$$



On peut supposer A et B nuls, à condition de choisir convenablement l'origine des coordonnées, de sorte que l'équation des surfaces cherchées peut s'écrire

$$y\cos z - x\sin z = \frac{m}{m^2+1}(e^{mz}+e^{-mz}).$$

Les équations des asymptotiques sont alors

$$\frac{y - \frac{m}{m^2+1}\cos z(e^{mz}+e^{-mz})}{\sin z}$$

$$= \frac{z + \frac{m}{m^2+1}\sin z(e^{mz}+e^{-mz})}{\cos z} = \frac{1-m^2}{2(1+m^2)}(e^{mz}-e^{-mz}) + C$$

pour la ligne asymptotique trajectoire $C = 0$.

J'ai supposé $m \neq 0$; pour $m = 0$ on aurait les hélicoïdes minima sur lesquels toutes les asymptotiques sont trajectoires orthogonales des génératrices.

5. Les surfaces dont la ligne de striction est ligne asymptotique présentent quelques analogies avec les surfaces à plan directeur. Ces analogies proviennent de ce fait que, pour ces dernières, la ligne $\frac{1}{r} = 0$ est ligne asymptotique, tandis que, pour les premières, la ligne $r = 0$ est ligne asymptotique.

L'équation des lignes asymptotiques de ces surfaces peut s'écrire

$$(1) \qquad \frac{2}{K}\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{ds} + \frac{1}{r}\frac{d\left(\frac{1}{K}\right)}{ds} + K\cos\theta = 0$$

tandis que, pour les surfaces à plan directeur, on a

$$2K\frac{dr}{ds} + r\frac{dK}{ds} + K\cos\theta = 0.$$

L'équation (1) peut s'intégrer facilement : on trouve

$$\frac{2}{r\sqrt{K}} + \int \lambda K^{\frac{3}{2}}\,ds = \text{const.};$$

d'où l'on déduit, $r$ et $r'$ étant deux solutions,

$$\frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right]^2 = \text{const.}$$

Lorsque K est constant, $K^{\frac{3}{2}}$ sort du signe de quadrature; or, si l'on pose

$$r' = -\int \cos\theta\, ds,$$

$r = r'$ est une solution de l'équation des trajectoires orthogonales, et

$$r = \frac{2}{K^2 r'}$$

est une solution de l'équation des asymptotiques. Pour les surfaces (S), la relation entre les deux sortes de courbes s'exprimait par

$$r = \frac{r'}{2}.$$

Si la ligne de striction est une courbe, le paramètre de distribution est égal à la torsion de cette courbe, de sorte que, si le paramètre est constant, la ligne de striction est une courbe à torsion constante.

Si la ligne de striction est une droite, $\theta$ est constant, et $\cos\theta$ sort du signe d'intégration. Si l'on prend la ligne de striction pour axe des $z$, les équations d'une génératrice peuvent s'écrire

$$\frac{X}{\cos\varphi \sin\theta} = \frac{Y}{\sin\varphi \cos\theta} = \frac{Z-\zeta}{\cos\theta},$$

$\theta$ étant constant, et $\zeta$ étant une fonction de $\varphi$.

On a alors pour équation générale des surfaces à ligne de striction rectiligne

$$Z = \cot\theta\sqrt{X^2+Y^2} + F\left(\frac{Y}{X}\right);$$

on trouve facilement pour expression du paramètre de distribution

$$K = \pm\frac{d\varphi}{d\zeta},$$

le signe à prendre dépendant du sens dans lequel tourne la droite en s'élevant. Si $K = \text{const.}$, on a, en prenant le signe +, par exemple, et en choisis-

sant pour plan des ZOX celui qui contient la génératrice passant par l'origine,

$$Z = \cot\theta\sqrt{X^2+Y^2} + \frac{1}{K}\,\text{arc tang}\,\frac{Y}{X}$$

ou, en coordonnées semi-polaires,

$$Z = \rho\cot\theta + \frac{\varphi}{K}.$$

L'équation des lignes asymptotiques en coordonnées $r$ et $s$ est alors

$$\frac{2}{r} + K^2\cos\theta s = \text{const.},$$

ce qui donne, en remarquant que $r\sin\theta = \rho$ et que $s$ est la coordonnée du pied de la génératrice,

$$\frac{2}{\rho} + K\cot\theta(\varphi - \varphi_0) = 0,$$

équation de la projection d'une asymptotique sur le plan $Z = 0$.

On obtient ainsi des sortes de spirales tournant autour du pôle. Le pôle est un point asymptote, et les courbes ont des asymptotes tangentes au cercle dont le centre est à l'origine, et le rayon $\frac{2\tang\theta}{K}$.



SUR

# LES LIGNES SINGULIÈRES

## DES FONCTIONS ANALYTIQUES,

PAR M. PAUL PAINLEVÉ,
Ancien Élève de l'École Normale supérieure.

## INTRODUCTION.

La première Partie de ce travail est consacrée à l'étude d'une fonction dans le voisinage d'une ligne singulière ou coupure. La notion de coupure se présente dans la discussion de l'intégrale de Cauchy; elle peut même s'introduire, ainsi que l'a montré M. Hermite, à l'aide d'intégrales définies où la variable d'intégration est réelle. La série de Taylor, convergente dans un certain cercle, offre aussi un exemple simple de coupure, et MM. Weierstrass, Tannery, Appell ont formé de nombreuses séries qui représentent deux fonctions distinctes dans deux aires différentes du plan. Nous énumérons, dans un premier Chapitre, les singularités diverses que peuvent présenter les symboles (et particulièrement les séries) qui définissent, dans un certain espace, une fonction analytique de $z$. Ceci nous conduit à quelques théorèmes sur les séries, dont le plus important est le suivant : Quand une série $F = \Sigma V_n(x, y)$ converge uniformément sur le contour $s$ d'une aire fermée S, à l'intérieur de laquelle les fonctions $V_n(x, y)$ sont régulières et satisfont à l'équation $\Delta V_n = 0$ : 1° *la série* F *converge uniformément dans* S; 2° *les séries, formées par les dérivées de ses termes, convergent uniformément dans toute aire* S' *intérieure à* S *et sans point commun avec* $s$, *et elles représentent les dérivées correspondantes de* F.

Soit une fonction $F(z)$ définie d'un côté d'une ligne L et présentant cette ligne comme coupure : il peut exister une seconde fonction $F_1(z)$ qui

coïncide avec la première dans le voisinage de L et la *prolonge* au delà sans discontinuité. La coupure est alors *artificielle*, elle est *essentielle* au cas contraire : le cercle de convergence de la série de Maclaurin $F(z)$, qui développe la fonction $\frac{1}{1-z}$, est une coupure artificielle de $F(z)$; la série $F(z)$ qui représente dans le cercle fondamental C une fonction fuchsienne, holomorphe et définie seulement dans ce cercle, admet au contraire C comme coupure essentielle. Nous donnons d'abord une forme de la condition nécessaire et suffisante pour qu'une coupure soit artificielle, qui s'applique à une coupure quelconque. De cette condition, on déduit plusieurs théorèmes, concernant les fonctions définies par une relation implicite ou par une équation différentielle du premier ordre : ces derniers sont utiles dans l'étude des intégrales uniformes d'une équation différentielle, ainsi que je le montre dans plusieurs applications, et notamment en recherchant *toutes les équations de la forme* $\frac{du}{dz} = f(z, u)$ [*où* $f(z, u)$ *est uniforme*], *dont l'intégrale générale peut être uniforme.*

Dans le cas où la coupure est une ligne analytique, la condition précédente prend une forme plus simple, indiquée dès l'année 1870 par M. Schwarz (¹), et qui permet de discuter plusieurs classes de coupures. Des exemples des principales singularités d'une fonction dans le voisinage d'une coupure essentielle terminent cette première Partie.

Dans la seconde, nous étendons aux fonctions uniformes les plus générales les formes de décomposition en sommes et en produits, données dans la théorie des fonctions à points singuliers. En 1881, avant le théorème de M. Mittag-Leffler, M. Picard indiquait, dans le cas d'une coupure circulaire, une forme de développement en produit, applicable à une coupure quelconque, et, peu de temps après, décomposait une fonction $F(z)$, ayant pour coupures des segments de droites, en une somme de $n$ fonctions n'ayant qu'une coupure, puis développait ces fonctions en séries (²). Après la découverte du théorème de M. Mittag-Leffler, M. Goursat (³) a étendu ce théorème aux fonctions uniformes présentant des singularités quelconques. Enfin, M. Mittag-Leffler (⁴) a consacré lui-même un Mémoire à l'étude de

(¹) *Monatsberichte der Academie zu Berlin*, octobre 1870.

(²) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 21 mars 1881, 22 mai 1882.

(³) *Id.*, 26 février 1883.

(⁴) *Acta mathematica*, t. IV; 1884.

ces propositions. Nous donnons, avec une démonstration un peu différente de ces théorèmes, plusieurs modes de développements en séries des fonctions présentant dans le plan une seule coupure, auxquelles on se trouve ramené. Un premier développement, analogue à la série de Taylor, repose sur la représentation conforme ; les autres généralisent les développements, indiqués par M. Appell dans le cas d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un contour d'arcs de cercles. Ils découlent de ce théorème que toute fonction holomorphe dans une aire convexe *peut se développer dans cette aire en série de polynômes*.

Les notions de *résidu*, d'*ordre*, de *reste* (définis soit comme intégrales, soit comme coefficients) se généralisent dès lors facilement avec les propositions qui s'y rattachent. En particulier, le théorème des résidus et les théorèmes de Liouville subsistent pour les fonctions doublement périodiques à singularités quelconques.

Enfin, plusieurs des résultats énoncés ont été étendus aux fonctions V de deux ou trois variables qui satisfont à l'équation $\Delta V = 0$.

# PREMIÈRE PARTIE.

## ÉTUDE D'UNE FONCTION DANS LE VOISINAGE D'UNE COUPURE.

## CHAPITRE I.

1. Avant d'aborder l'étude d'une fonction dans le voisinage d'une coupure, il convient d'énumérer brièvement les singularités que peuvent offrir les symboles qui représentent, dans une partie du plan, une fonction uniforme de la variable $z = x + iy$.

Soit une expression de la forme $P(x, y) + i\,Q(x, y)$, les fonctions P et Q étant uniformes dans tout l'espace du plan $xOy$ où elles sont définies. Nous supposons de plus qu'en chaque point d'une certaine aire S, $P + iQ$ admette une dérivée par rapport à $z$ et, par suite, qu'elle représente dans S une fonction holomorphe de $z$.

Considérons dans le plan une aire fermée quelconque $\sigma$ : $P + iQ$ sera dans $\sigma$ fonction holomorphe de $z$, sauf peut-être en certains points. Ces points pourront être en nombre infini (comprendre par exemple tous les points de $\sigma$) et affecter des distributions diverses.

En premier lieu, si tous les points singuliers peuvent être enfermés à l'intérieur de cercles n'ayant pas de points communs et de rayon aussi petit qu'on veut, nous dirons que l'ensemble de ces points E est *ponctuel*. Les points forment alors des suites ayant pour limites d'autres points, formant eux-mêmes des suites analogues. La classification de ces ensembles a été faite par M. Cantor.

En second lieu, si tous les points ne satisfont pas à la condition précédente, mais peuvent être enfermés à l'intérieur de contours tels que l'aire totale enclose soit aussi petite qu'on veut, nous dirons que l'ensemble E est *linéaire*. Les points forment alors des suites ou des ensembles ponctuels, ayant pour limites des lignes : autrement dit, il existe des lignes telles que, si l'on décrit un cercle d'un quelconque de leurs points comme centre, ce cercle renferme un nombre infini de points E, si petit que soit son rayon.

Par exemple, l'ensemble E sera composé de points infiniment voisins (ou même de tous les points) de plusieurs lignes. Ces lignes peuvent être elles-mêmes en nombre infini et former des suites ayant pour limites des lignes ou des points. A ces ensembles de lignes, s'étend immédiatement la classification de M. Cantor sur les ensembles de points : le mot *ligne* remplace partout le mot *point*, une ligne pouvant parfois se réduire à un point.

En dernier lieu, il est possible que les points E soient distribués dans des aires finies $\sigma'$, $\sigma''$, ..., c'est-à-dire qu'une portion de ces aires, si petite qu'elle soit, en renferme un nombre infini (l'ensemble E comprendra par exemple tous les points d'un certain espace). L'ensemble sera dit alors *superficiel*. Les aires $\sigma'$, $\sigma''$, ... peuvent être en nombre infini et former des suites ayant pour limites des points ou des lignes.

Telles sont les dispositions possibles dans $\sigma$ des points singuliers de l'expression $P(x, y) + iQ(x, y)$. En chacun de ces points, une au moins des fonctions P, Q est soit discontinue, soit indéterminée, ou n'admet pas à la fois de dérivée partielle par rapport à $x$ et $y$, ou bien enfin ces dérivées partielles ne vérifient pas les deux égalités

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Supposons tout d'abord que les points E ne forment pas dans $\sigma$ un ensemble superficiel. Si, dans ce cas, la fonction $P + iQ$ est continue dans $\sigma$, il sera démontré plus tard en toute rigueur qu'elle est nécessairement holomorphe dans le même espace. Les points E sont donc des points de discontinuité de $P + iQ$. Un premier genre de singularité qu'il convient de distinguer est le suivant : soit $z_0$ un point isolé de l'ensemble E, tel que, $z$ tendant vers $z_0$ d'une façon quelconque, $P + iQ$ tende vers une certaine valeur $a$; pour $z = z_0$, $P + iQ$ est discontinue ou indéterminée. Appelons $f(z)$ la fonction de $z$, qui coïncide avec $P + iQ$ en dehors de $z_0$ et prend pour $z_0$ la valeur $a$. Cette fonction est holomorphe au point $z_0$. Une telle discontinuité est purement apparente. Un exemple très simple en est fourni par l'expression

$$P + iQ = \frac{4}{\pi}\left[f(z)\sin(x^2 + y^2) + \frac{f(z)\sin 3(x^2 + y^2)}{3} + \frac{f(z)\sin 5(x^2 + y^2)}{5} + \ldots\right],$$

où $f(z)$ est holomorphe et différent de zéro à l'origine : $P + iQ = f(z)$, quel que soit $z$, sauf pour le point $z = 0$ où $P + iQ$ est nulle. Nous suppo-

serons désormais qu'en pareil cas on remplace $P + iQ$ par $f(z)$, et ainsi pour tous les points analogues : ces points peuvent former des suites ayant pour limites d'autres points $z'$, $z''$, .... Si ces points $z'$ sont pour $f(z)$ des discontinuités du même genre, on les supprime comme les $z_0$. Cela fait, l'ensemble E peut comprendre certaines lignes isolées $L_0$, telles que $z$, tendant d'une manière quelconque vers un point $\zeta$ de $L_0$, la valeur de $f(z)$ tende vers une limite $a(\zeta)$. La fonction $\varphi(z)$, qui coïncide avec $f(z)$ en dehors de $L_0$ et prend sur $L_0$ les valeurs $a(\zeta)$, est, comme nous le verrons, holomorphe dans le voisinage de $L_0$. On peut citer comme exemple l'expression

$$P + iQ = \frac{4}{\pi}\left[f(z)\sin x^2 + \frac{f(z)\sin 3x^2}{3} + \frac{f(z)\sin 5x^2}{5} + \ldots\right],$$

$f(z)$ étant holomorphe sur $Ox$. Nous remplacerons là encore $f(z)$ par $\varphi(z)$, et ainsi pour toutes les singularités analogues. En définitive, s'il existe une fonction $\varphi(z)$ coïncidant avec $P + iQ$ en dehors de l'ensemble E, continue et par suite holomorphe en certains points E' de cet ensemble, on substitue $\varphi(z)$ à $P + iQ$.

Ces singularités parasites éliminées, quelles sont les discontinuités que présente $P + iQ$ ?

Si l'ensemble E est ponctuel, les points singuliers de $P + iQ$ dans $\sigma$ sont des pôles ou des points essentiels.

Si l'ensemble E est linéaire, la fonction $P + iQ$ est en outre affectée de coupures. Ces coupures sont isolées ou sont les limites de suites de points essentiels ou de coupures. Dans le second cas, $P + iQ$ est nécessairement discontinue ou indéterminée aux environs de la coupure. Dans le premier cas, soit L la ligne considérée ; quand $z$ tend vers un point quelconque $\zeta$ de L en restant du côté C de L, $P + iQ$ peut tendre vers une certaine valeur $f(\zeta)$ ; du côté opposé C' de L, $P + iQ$ peut prendre également sur L la suite de valeurs $f_1(\zeta)$, qui doit différer de $f(\zeta)$. Il est possible, au contraire, que d'un côté de L (ou des deux côtés), pour des points $\zeta$ infiniment voisins sur L, ou même pour tous les points de L, $P + iQ$ ne tende pas vers une limite quand $z$ tend vers $\zeta$ sur un chemin $l$, ou que cette limite dépende du chemin $l$. Dans tous les cas, l'expression $P + iQ$ peut n'avoir aucun sens sur L, ou ses valeurs pour les points de cette ligne sont entièrement indépendantes des valeurs qu'elle prend aux points voisins.

Si l'ensemble E est superficiel, $P + iQ$ présente dans $\sigma$ des espaces lacunaires $\sigma'$, $\sigma''$, .... En tout point E de ces espaces, $P + iQ$ peut n'avoir pas de

sens, ou être discontinue, ou ne pas admettre de dérivée par rapport à $z$ ([1]). Le contour $s'$ de l'aire $\sigma'$ est une coupure de $P + iQ$, cette ligne peut être la limite de singularités extérieures à $\sigma'$; au cas contraire, $P + iQ$ peut tendre vers une suite de valeurs $f(\zeta)$, quand $z$ tend vers un point $\zeta$ de $s'$, extérieurement à $\sigma'$. Il arrive notamment que $P + iQ$ est continue sur $s'$ et dans $\sigma'$, et n'admet pas dans $\sigma'$ de dérivée par rapport à $z$.

En dernier lieu, si $P + iQ$ est holomorphe dans $\sigma$ et tend vers la valeur $f(\zeta)$, fonction continue de $\zeta$, quand le point $z$ de $\sigma$ tend d'une manière quelconque vers le point $\zeta$ du contour $s$, nous dirons que la fonction $P + iQ$ est holomorphe dans $\sigma$ et *continue sur son contour*.

2. Toutes ces remarques ont leurs analogues dans l'étude des fonctions V de deux ou trois variables qui satisfont à l'équation $\Delta V = 0$. Soit $P(x, y, z)$ une fonction de $x, y, z$, uniforme dans tout l'espace où elle est définie, et représentant dans un certain volume une fonction régulière $V(x, y, z)$, qui satisfait à l'équation $\Delta V = 0$. Les points singuliers de $P(x, y, z)$ seront les discontinuités de P et de ses dérivées premières, et les points où ses dérivées secondes ne vérifient pas l'équation $\Delta P = 0$. On voit, comme plus haut, qu'à l'intérieur $\sigma$ d'une surface fermée $s$ ces points peuvent former des ensembles *ponctuels, linéaires, superficiels*, ou être distribués dans des volumes finis, et former ainsi un *ensemble à trois dimensions*.

Ce dernier cas excepté, les points E sont nécessairement des discontinuités de P ou de ses dérivées premières, d'après ce théorème que, si une fonction V est régulière dans un espace, sauf peut-être sur une surface où elle est continue, ainsi que ses dérivées premières, elle est régulière dans tout cet espace. De plus, s'il existe une fonction $Q(x, y, z)$, coïncidant avec $P(x, y, z)$ en dehors des points E, et continue en des points ou sur des lignes et des surfaces E' qui sont des discontinuités de P, on supprime ces singularités apparentes en substituant Q à P. Mais les points E' peuvent être encore des discontinuités des dérivées premières de Q. Cette discussion s'achève comme la première. En particulier, si $P(x, y, z)$ est une fonction régulière dans $\sigma$, et si elle tend vers une valeur $f(\xi, \eta, \zeta)$, fonction continue de $\xi, \eta, \zeta$, quand $(x, y, z)$ tend vers le point $(\xi, \eta, \zeta)$ de $s$ en restant intérieur à $\sigma$, on dira qu'elle est régulière dans $\sigma$ et continue sur $s$; on dira de

([1]) $P + iQ$ peut admettre une dérivée en certains points $z_0$ de $s'$, mais cette dérivée n'existe pas pour des points infiniment voisins.

même que ses dérivées premières sont continues dans $\sigma$ et sur $s$, si les fonctions $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}$ vérifient la même condition.

3. Les diverses singularités que nous avons énumérées sont offertes par les symboles élémentaires qui définissent une fonction de $z$. Envisageons, par exemple, l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(t, z)\,dz = F(z)$, où $t$, $\alpha$ et $\beta$ sont réels. Si à chaque valeur de $t$ correspondent des points singuliers de $f(t, z)$ ne formant pas de suites linéaires, la fonction F ainsi définie présentera en général des lignes singulières; si à chaque valeur de $t$ correspondent des lignes singulières de $f(t, z)$, la fonction F présentera des espaces singuliers. Il en serait de même si F était définie par l'intégrale double

$$\int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta f(z, t, \theta)\,dt\,d\theta,$$

$f(z)$ ayant des points singuliers pour chaque valeur réelle de $t$ et de $\theta$.

En particulier, ces intégrales peuvent définir une fonction F continue dans une aire S, dont la dérivée par rapport à $z$ existe dans une partie de cette aire et n'existe pas dans l'autre. Ainsi l'intégrale $\int_0^1 L\frac{z - it}{z - 1 - it}\,dt$ $\left(\text{où } L\frac{z-it}{z-1-it}\right.$ représente une fonction uniforme de $z$ ayant pour coupure le segment de droite $y = t$ compris entre $x = 0$ et $x = 1\Big)$ définit une fonction de $z$ holomorphe dans le plan, sauf pour les points $x + iz$ dont l'$x$ et l'$y$ sont positifs et plus petits que l'unité; car, en ces points, F est égale à une fonction de $z + 2i\pi(1 - y)$. De plus, F est continue dans le plan, sauf pour les points des droites $x = 0$, $x = 1$ dont l'ordonnée est comprise entre 0 et 1.

Il est facile également de former des séries qui définissent dans une aire S une fonction uniforme de $z$, et qui présentent dans le plan des singularités quelconques, notamment celle dont nous venons de parler. Soit en effet $U(x,y) + iV(x,y)$ une fonction holomorphe de $z$, telle que, pour $x = 0$, $U = 0$. Développons en série de fonctions de Laplace, entre $x = -\pi$, $x = \pi$ et $y = 0$, $y = \pi$, les fonctions $V(x,y)$ et $U_1(x,y)$ : $U_1(x,y)$ étant égale à U pour $x > 0$ et à $-U$ pour $x < 0$. La série $F = U_1 + iV$ sera continue pour les valeurs de $x$ et de $y$ comprises, les premières entre $-\pi$ et

$+\pi$, les secondes entre o et $\pi$; elle n'admettra pas de dérivée par rapport à $z$ pour les valeurs négatives de $x$.

Si les termes d'une série sont des fonctions de $z$, la série n'aura pas de sens en tout point qui sera singulier pour un de ses termes, et l'on peut faire en sorte que ces points forment des ensembles quelconques. Si, dans une aire S, tous les termes sont holomorphes, la série peut représenter une fonction holomorphe dans une partie de S et diverger dans l'autre. Mais d'autres singularités sont-elles possibles? Pour étudier cette question, nous aurons recours à quelques propriétés bien connues des séries, que nous rappellerons tout d'abord.

4. Une série $\Sigma\varphi_n(t)$ converge *uniformément* dans un intervalle $t_0 t_1$, si à tout nombre positif $\varepsilon$ correspond un entier $\nu$ tel que, $n$ étant égal ou supérieur à $\nu$, on ait

$$|R_n(t)| < \varepsilon,$$

pour toutes les valeurs de $t$ égales à $t_0$, $t_1$, ou comprises entre $t_0$ et $t_1$ (la variable $t$ est réelle). Ceci revient à dire qu'on peut trouver $\nu$ assez grand pour que, $p$ étant quelconque, on ait dans le même intervalle

$$|S_{\nu+p}(t) - S_\nu(t)| < \varepsilon.$$

Les raisonnements qui vont suivre reposent sur ces deux théorèmes :

*Lemme I.* — Si tous les termes d'une série sont susceptibles d'intégration et si la série converge uniformément dans un intervalle, la fonction que représente la série est intégrable dans cet intervalle, et son intégrale est la somme des intégrales de tous les termes.

*Lemme II.* — Si tous les termes d'une série $f(t)$ admettent une dérivée susceptible d'intégration et si de plus la série de ces dérivées converge uniformément dans un intervalle, elle représente la dérivée de $f(t)$ dans cet intervalle.

Le lemme I peut s'étendre à une certaine classe de séries non uniformément convergentes. Soit une série $f(t) = \Sigma\varphi_n(t)$ qui converge uniformément dans tout intervalle, compris entre $t_0$ et $t_1$ et ne renfermant pas certains points $t'$, $t''$, .... Nous convenons de dire alors, pour abréger, que la série converge *uniformément entre $t_0$ et $t_1$, sauf pour les valeurs $t'$, $t''$*, .... Les points $t'$, $t''$, ... peuvent former sur l'axe des $t$ des suites ponctuelles. En

ces points, la série peut être divergente. Si le module maximum de $S_n(t)$ entre $t_0$ et $t_1$ ne croît pas au delà de toute limite avec $n$, le lemme I s'applique encore à l'intervalle $t_0 t_1$.

Pour le voir, il suffit de décomposer l'intervalle $t_0 t_1$ en deux parties $s$ et $s'$ (formées d'ailleurs d'intervalles séparés), $s'$ renfermant toutes les valeurs $t', t'', \ldots$. Soit M la limite supérieure de $|(S_n t)|$. On peut toujours prendre $s'$ de telle sorte que $\left|\int_{s'} M\,dt\right|$ soit inférieur à un nombre positif $\varepsilon$ aussi petit qu'on veut : cela fait, il existe un nombre $n$ assez grand pour que, $p$ étant un entier quelconque, on ait dans tout l'intervalle $s$

$$|S_{n+p}(t) - S_n(t)| < \varepsilon.$$

Si donc on désigne par $S'_p$ la somme des $n$ premiers termes de la série

$$\sum \int_{t_0}^{t_1} \varphi_n(t)\,dt,$$

le module de la différence $(S'_{n+p} - S'_n)$ sera, pour la même valeur de $n$, inférieur à $\sigma[\sigma = \varepsilon(l+2)]$, si $l$ est la longueur du segment $t_0 t_1$. La nouvelle série converge donc, et il apparaît aussitôt qu'elle représente l'intégrale de $f(t)$. Il suffit, pour que le raisonnement s'applique, que $\int_{s'} S_n(t)\,dt$ tende vers o uniformément avec $s'$ (quel que soit $n$).

Il convient d'ajouter qu'une série $\sum \varphi_n(t)$ peut converger dans un intervalle $t_0 t_1$, sans converger uniformément dans aucun intervalle fini, si petit qu'il soit. Soit par exemple une fonction $f(t)$, à variation limitée entre $-\pi$ et $+\pi$, et discontinue dans tout intervalle, ainsi que la suite de valeurs $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$. La série

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\beta)\,d\beta \left[\frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} \cos n(\beta - t)\right]$$

converge dans l'intervalle $-\pi, +\pi$, et représente dans cet intervalle $\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$. Comme ses termes sont fonctions continues de $t$, elle ne converge uniformément dans aucun intervalle (sinon, sa somme serait fonction continue de $t$ dans cet intervalle).

Ces remarques faites, considérons une série de la forme

$$\Sigma f_n(z),$$

ou de la forme

$$\Sigma \varphi_n(x, y).$$

Une pareille série converge *uniformément dans l'aire* S quand, à tout nombre positif $\varepsilon$, correspond un entier $\nu$ tel que, $n$ étant supérieur ou égal à $\nu$, on ait pour tout point $z$ (ou $x, y$) de S et de son contour

$$| R_n(z) | \quad \text{ou} \quad R_n(x, y) | < \varepsilon.$$

Si une série converge uniformément dans tout espace $\sigma$ intérieur à S et ne renfermant pas certains points $z'$ ou certaines lignes $l'$ de S, nous convenons de dire que la série converge *uniformément, sauf aux points* $z'$ ou sur les lignes $l'$.

La série converge *uniformément sur une ligne* AB $[x = g(t), y = h(t)]$, si la série

$$\Sigma f_n[z(t)] \quad \text{ou} \quad \Sigma \varphi_n[x(t), y(t)]$$

converge uniformément entre $t_0$ et $t_1$ ($t_0$ et $t_1$ étant les valeurs de $t$ qui correspondent aux points A et B).

5. Nous pouvons dès lors énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Soit une série* $\Sigma f_n(z) = F(z)$ *et une aire* S *à contour quelconque : si les fonctions* $f_n(z)$ *sont holomorphes dans* S *et continues sur* $s$, *et si la série* $F(z)$ *converge sur* $s$ *uniformément :* 1° *la série* $F(z)$ *converge uniformément dans toute aire* S' *intérieure à* S *et sans point commun avec* $s$; 2° *les séries formées par les dérivées successives des termes de* $F(z)$ *convergent uniformément dans* S' *et représentent les dérivées successives de* $F(z)$ *dont l'existence est ainsi démontrée.*

Formons en effet la série

$$\sum \frac{f_n(z)}{(z - x)^{p+1}},$$

et appelons M le module maximum de $\frac{1}{(z - x)^{p+1}}$ quand $z$ varie sur le contour $s$, et $x$ dans l'aire S'. On peut, quel que soit $\varepsilon$, trouver un entier $\nu$ assez grand pour que, $n$ étant supérieur à $\nu$, $|M R_n(z)|$ soit inférieur à $\varepsilon$ quand $z$

parcourt $s$. D'après le lemme I, la série

$$\sum \int_s \frac{f_n(z)}{(z-x)^{p+1}} dz$$

est convergente, et de plus, pour les valeurs de $n$ qu'on vient de définir, le reste de cette série $R'_n(x)$ a un module inférieur à $l\varepsilon$ ($l$ étant la longueur de $s$), quelle que soit la position de $x$ dans S' et sur son contour. D'autre part,

$$\int_s \frac{f_n(z)\,dz}{(z-x)^{p+1}} = \frac{2 i \pi}{1.2\ldots p} f_n^p(x).$$

La série $\Sigma f_n^p(x)$ converge donc uniformément dans S'. On déduit sans peine du lemme II qu'elle représente la dérivée $p^{\text{ième}}$ de la fonction $F(x)$, définie par la série convergente $\Sigma f_n(x)$.

Le théorème est encore vrai, si chacun des termes $f_n(z)$ est discontinu sur $s$, en des points $a_n, a'_n, \ldots$, ne formant pas de suite linéaire, pourvu que $|f_n(z)|$ ne croisse pas dans S et sur $s$, au delà de toute limite. Il suffit de répéter le raisonnement précédent, en remarquant que l'intégrale $\int_s \frac{f_n(z)}{(z-x)^{p+1}}$ a un sens et représente encore $\frac{2 i \pi}{1.2\ldots p} f_n^p(x)$, ainsi qu'on le voit facilement.

Le théorème subsiste même si la série converge uniformément sur $s$, sauf en des points $a_1, a_2, \ldots$ (ne formant pas de suite linéaire), pourvu que le module maximum de $S_n(z)$ sur $s$ ne croisse pas au delà de toute limite avec $n$. Il suffit de raisonner comme précédemment, en appliquant le lemme I généralisé.

6. Théorème II. — Soit un espace S, admettant la représentation conforme sur un cercle, et une série $\Sigma v_n(x, y)$ : les fonctions $v_n(x, y)$, qui satisfont dans S à l'équation $\Delta v_n = 0$, sont uniformes et régulières dans cet espace, et continues sur son contour $s$. Si la série

$$V(x, y) = \Sigma v_n(x, y),$$

converge uniformément sur $s$ : 1° *elle converge uniformément dans toute aire S' intérieure à S, et sans point commun avec $s$*; 2° *les séries formées par les dérivées partielles des termes de $V(x, y)$ convergent uniformément dans S', et représentent les dérivées partielles de $V(x, y)$ dont*

*l'existence est ainsi démontrée. Ces dérivées satisfont à l'équation* $\Delta V = 0$.

Supposons d'abord que S soit un cercle C de rayon 1, ayant l'origine pour centre. On sait que

$$\frac{\partial^p v_n}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_c \frac{\partial^p}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \left( \frac{1 - a^2}{r^2} \right) v_n(\xi, \eta)\, ds;$$

$(\xi, \eta)$ est un point de la circonférence $c$ de C, $(x, y)$ un point de C; $a^2 = x^2 + y^2$; $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$.

Si M est le module maximum de $\frac{\partial^p}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \left( \frac{1 - a^2}{r^2} \right)$ quand $(\xi, \eta)$ parcourt $c$, et quand $(x, y)$ varie dans S', on peut trouver un entier $\nu$ assez grand pour que, $n$ étant supérieur à $\nu$, $M\,|R_n(\xi, \eta)|$ soit inférieur à $\varepsilon$, quel que soit $(\xi, \eta)$ sur $c$. Par suite, la série

$$\sum \frac{1}{2\pi} \int_c \frac{\partial_p}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \left( \frac{1 - a^2}{r^2} \right) v_n(\xi, \eta)\, ds,$$

converge uniformément dans S'; car, pour les mêmes valeurs de $n$, le reste $R'_n(xy)$ est dans cet espace inférieur à $\varepsilon$.

La série $\sum \frac{\partial^p v_n}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ représente, d'après le lemme II, $\frac{\partial^p V}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$; la fonction V définie par la série $\Sigma v_n(x, y)$ satisfait donc dans C à l'équation $\Delta V = 0$ et est régulière dans ce cercle.

En partant de l'expression

$$v(x, y) + i\,u(x, y) = \int_c v(\xi, \eta)\, \frac{e^{is} + z}{e^{is} - z}\, ds,$$

on voit que la série

$$(\alpha) \qquad F(z) = \Sigma v_n(x, y) + i\,u_n(x, y)$$

converge uniformément dans S', ainsi que ses dérivées. Ceci résulte encore de l'intégration de la série $\sum \frac{\partial v_n}{\partial x} - i \frac{\partial v_n}{\partial y}$. Toutes les fonctions $f_n(z)$ dont la partie réelle est $v_n(x, y)$ sont de la forme $v_n(x, y) + i\,u_n(x, y) + i C n$. Si la série

$$(\beta) \qquad \Sigma v_n(x, y) + i\,u_n(x, y) + i C n$$

converge pour un point $(x_0, y_0)$ de S, comme la série ($\alpha$) converge pour $x_0 y_0$, la série $\Sigma C n$ est nécessairement convergente, et par suite ($\beta$) converge uniformément dans S'. Autrement dit, $u_n(x, y)$ désignant une quelconque des fonctions conjuguées de $v_n(x, y)$, la série

$$\Sigma v_n(x, y) + i[u_n(x, y) - u_n(x_0, y_0)]$$

converge uniformément dans S'.

Soit donc une série $\Sigma f_n(z) = \Sigma v_n(x, y) + i\, u_n(x, y)$, *si la série* $\Sigma v_n(x, y)$ *converge uniformément sur* $c$, *et si la série* $\Sigma u_n(x, y)$ *converge en un point* $(x_0, y_0)$ *intérieur à* $c$, *la série et les séries formées par les dérivées de ses termes convergent uniformément dans tout espace* S' *intérieur à* $c$.

Remarquons de plus que, si une série $\Sigma v_n(x, y)$ converge uniformément dans une aire $\sigma$, les séries formées par les dérivées de ses termes convergent uniformément dans toute aire $\sigma'$ intérieure à $\sigma$; il suffit, pour le voir, de décomposer $\sigma'$ en parties $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ qui puissent être enfermées dans des cercles $c_1, c_2, \ldots$ intérieurs à $\sigma$, et l'on raisonne sur ces cercles comme sur $c$.

Revenons maintenant au cas où l'aire S est quelconque; d'après la remarque précédente, tout revient à démontrer que la série $\Sigma v_n(x, y)$ converge uniformément dans toute aire S' intérieure à $s$. Soit

$$z = f(z_1) = \varphi(x_1, y_1) + i\,\psi(x_1, y_1)$$

une fonction qui représente d'une manière conforme l'aire S sur le cercle C. Inversement, $z_1 = f_1(z) = \varphi_1(x, y) + i\,\psi_1(x, y)$. Les fonctions $f$ et $f_1$ sont holomorphes, la première dans C, la seconde dans S. Posons $x = \varphi(x_1, y_1)$, $y = \psi(x_1, y_1)$ : les fonctions $v'_n(x_1, y_1)$ sont régulières dans C et satisfont à l'équation $\Delta v'_n = 0$. De plus, la série $\Sigma v'_n(x_1, y_1)$ converge uniformément sur $c$; elle converge donc uniformément dans toute aire $S'_1$ intérieure à $c$; si l'on remplace $x_1$ par $\varphi_1(x, y)$, $y_1$ par $\psi_1(x, y)$, le théorème est démontré. On généralise de la même manière la remarque relative à la série

$$\Sigma v_n(x, y) + i\, u_n(x, y).$$

Le théorème II est encore exact si la série $\Sigma v_n(x, y)$ *converge uniformément sur* $s$, *sauf en des points ne formant pas de suite linéaire*, pourvu que le module maximum de $S_n(x, y)$ sur $s$ ne croisse pas au delà de toute limite.

Les théorèmes I et II ont été établis en supposant que S n'avait pas de

points à l'infini : mais on ramène tous les cas à celui-là à l'aide de la transformation $z = \frac{1}{z_1 - a}$, le point $a$ étant extérieur à S.

7. On peut donner du théorème II une démonstration qui s'applique au cas où l'aire S est à contour quelconque et au cas où les termes $v_n$ de la série dépendent de trois variables.

Soit donc dans l'espace un volume quelconque S, n'ayant pas de point à l'infini, et limité par une surface $s$ à connexité quelconque. *Si la série* $V(x, y, z) = \Sigma v_n(x, y, z)$ (*dont tous les termes sont des fonctions régulières dans* S, *continues sur* $s$, *et satisfont à l'équation* $\Delta v_n = 0$) *converge sur* $s$ *uniformément :* 1° *elle converge uniformément dans* S; 2° *les séries* ($\alpha$) *formées par les dérivées de ses termes convergent uniformément dans tout espace* S' *intérieur à* S *et sans point commun avec* $s$.

En premier lieu, si l'espace S est une sphère, on établit comme dans le plan, en partant de la formule

$$4\pi v_n(x, y, z) = \int\int_s \frac{R^2 - a^2}{R r^3} v_n(\xi, \eta, \zeta)\, ds,$$

que les séries ($\alpha$) convergent uniformément dans l'espace S'. Il en résulte que, si la série V converge dans S uniformément (S étant quelconque), les séries ($\alpha$) convergent dans S' uniformément.

Tout revient donc à démontrer la première proposition. Considérons pour cela la somme

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{\nu}^{\nu+p} v_n(x, y, z).$$

Cette fonction $\varphi$ est régulière dans S, continue sur $s$, et satisfait à l'équation $\Delta\varphi = 0$. Elle ne présente dans S ni maximum ni minimum, et, par suite, pour tout point $(x, y, z)$ de S, la valeur de $\varphi$ est comprise entre la plus grande et la plus petite valeur de $\varphi$ sur $s$, ou égale à l'une de ces deux valeurs. Si $\mu$ désigne le module maximum de $\varphi$ sur $s$, le module de $\varphi$ dans S est au plus égal à $\mu$. D'autre part, on peut, par hypothèse, trouver un entier $\nu$ assez grand pour que, quel que soit $p$, $|\varphi(x, y, z)|$ soit sur $s$ inférieur à un nombre positif donné $\varepsilon$, autrement dit pour que $\mu$ soit inférieur à $\varepsilon$. Pour tout point de S et de $s$, l'expression $\sum_{\nu}^{\nu+p} v_n(x, y, z)$ a donc, quel que soit $p$, un module inférieur à $\varepsilon$ : la série V converge dans S uniformément.

*Remarque.* — Si S comprend le point $\infty$, $s$ ayant tous ses points à distance finie, chaque fonction $v_n$, holomorphe dans S, est holomorphe pour le point $\infty$ : $v_n(\infty) = a_n$. Quand la série $\Sigma a_n$ est convergente, le théorème II s'applique encore à l'espace S. Il suffit de prouver que la série

$$\Sigma[v_n(x, y, z) - a_n] = \Sigma u_n(x, y, z)$$

converge dans S uniformément : pour le voir, on pose

$$x = \frac{x'}{r'^2}, \qquad y = \frac{y'}{r'^2}, \qquad z = \frac{z'}{r'^2}, \qquad r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

(l'origine est supposée extérieure à S) : la série $\sum \frac{u'_n(x', y', z')}{r'}$ a tous ses termes réguliers dans S', continus sur $s'$, et converge uniformément sur $s'$, par suite dans S' : on en conclut qu'il en est de même dans S de la série $\Sigma u_n(x, y, z)$.

Si la surface $s$ a des points à l'infini et si les fonctions $v_n$, régulières dans S, sont régulières aussi au point $\infty [v_n(\infty) = a_n]$, on voit, en employant la même transformation, que la série $\Sigma v_n$ converge dans S uniformément, quand la série $\Sigma r u_n(x, y, z)$ converge uniformément sur $s$, la série $\Sigma a_n$ étant de plus convergente $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$.

8. La série $\Sigma v_n(x, y, z)$ convergeant dans S uniformément, la fonction $V(x, y, z)$ est continue dans S et sur $s$ : quand $(x, y, z)$ tend vers le point $(\xi, \eta, \zeta)$ de $s$, $V(x, y, z)$ tend vers la valeur $V(\xi, \eta, \zeta) = \Sigma v_n(\xi, \eta, \zeta)$. Comme la remarque s'applique au cas de deux variables, on en déduit que, si la série $\Sigma f_n(z)$ converge sur $s$ uniformément, *elle converge uniformément* dans S, et, par suite, quand $z$ tend vers un point $\zeta$ de $s$, $\Sigma f_n(z)$ tend vers la valeur $\Sigma f_n(\zeta)$, ce qui ne résultait pas de la première démonstration.

Quand la série $\Sigma v_n(x, y, z)$ ne converge pas uniformément sur $s$, le théorème n'est plus démontré. Toutefois, en s'appuyant sur la formule

$$4\pi V(x, y, z) = \int\int_s \left[ V(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r} \frac{dV}{dn}(\xi, \eta, \zeta) \right] ds,$$

on peut l'étendre à certains cas où les séries $\Sigma v_n$, $\sum \frac{dv}{dn}$ convergent uniformément sur $s$, sauf sur des lignes de $s$.

**10.** Les théorèmes qui précèdent nous seront utiles dans la suite. Ils s'étendent facilement aux séries dont les termes sont des fonctions holomorphes dans un certain domaine de plusieurs variables complexes, $z, u, v, \ldots$. Leur application à la série de Taylor, dans le cas d'une ou de plusieurs variables, est immédiate et évidente. Une autre conséquence très simple est relative aux produits de la forme $\Pi f_n(z)$. Si les fonctions $\mathrm{L} f_n(z)$ sont holomorphes dans une aire S et continues sur son contour $s$, et si le produit converge uniformément sur $s$, il converge uniformément dans S, et représente une fonction holomorphe de $z$ dans cet espace. Si le produit des modules $\mathrm{R}_n$ des $f_n(z)$ converge uniformément sur $s$, le théorème est encore vrai à condition de remplacer dans l'énoncé S par un espace quelconque S' intérieur à S.

Revenons à la question qui nous a conduit à cette étude. Quand une série de la forme $\Sigma f_n(z)$ converge uniformément dans une aire S où les $f_n(z)$ sont holomorphes, elle représente dans S une fonction holomorphe de $z$. Il est impossible qu'une telle série converge uniformément dans une aire S, sauf en des points isolés, si ces points ne sont pas des points singuliers des $f_n(z)$. Supposons qu'elle converge uniformément dans une aire S, sauf aux points singuliers des $f_n(z)$, et sur une certaine ligne L : si cette ligne n'est pas singulière pour une ou plusieurs fonctions $f_n(z)$, elle rencontre le contour $s$ de S, à moins que les fonctions $f_n$ n'aient des points singuliers situés sur L ou tendant vers L, quand $n$ croît indéfiniment. Autrement, en retranchant plusieurs termes de la série, on obtiendrait une série dont tous les termes seraient holomorphes à l'intérieur d'un contour fermé $s'$ entourant L, et cette série, convergeant uniformément sur $s'$, convergerait uniformément à l'intérieur. Ceci suppose les $f_n(z)$ uniformes dans S, sinon L peut être encore une ligne fermée entourant les points critiques d'une infinité de fonctions $f_n$.

Enfin, admettons qu'une série de fonctions analytiques $\Sigma f_n(z)$ convergente dans une aire S où les $f_n(z)$ sont holomorphes ne représente en aucune portion de cette aire une fonction analytique : cette série ne saurait converger uniformément dans aucune partie de S, ni sur aucun contour fermé de $s'$ si petit qu'il soit. De plus, il existe une portion de $s'$ pour laquelle la série ne converge uniformément dans aucun intervalle, ou bien le module maximum de $\mathrm{S}_n(z)$ sur $s'$ croît avec $n$ au delà de toute limite. En dernier lieu, si $f_n(z) = v_n(x, y) + i\, u_n(x, y)$, les deux séries $\Sigma v_n$ et $\Sigma u_n$ doivent présenter respectivement les mêmes singularités. Ces conditions étant sup-

posées remplies, on ne saurait d'ailleurs en conclure que la série $\Sigma f_n(z)$ ne représente pas dans S une fonction analytique.

11. Pour terminer, nous déduirons des théorèmes I et II une conséquence relative au point à l'infini des fonctions holomorphes.

Soit une fonction $f(z)$ holomorphe pour tout point du plan situé à distance finie dans l'intervalle AOB compris entre deux droites OA, OB. Si $|f(z)|$ ne croît pas au delà de toute limite quand $z$ s'éloigne à l'infini entre deux droites quelconques $OA_1$, $OB_1$ comprises dans l'angle AOB, *$f'(z)$ et, par suite, toutes les dérivées successives tendent vers zéro.*

Soit $S_1$ l'espace $A_1OB_1$. Considérons la série $\sum \frac{f(a_n z)}{a_n}$ (les quantités $a_n$ sont réelles et positives et la série $\sum \frac{1}{a_n}$ converge). La série $\sum \frac{f(a_n z)}{a_n}$ converge dans $S_1$ uniformément; car, si M désigne le module maximum de $f(z)$ dans $S_1$ et sur $OA_1$, $OB_1$, la série $\sum \frac{M}{a_n}$ est convergente. Il en résulte que la série $\Sigma f'(a_n z)$ converge uniformément dans toute aire S' intérieure à $S_1$, par exemple dans l'aire S' comprise entre deux droites OA', OB', et deux cercles de centre O et de rayon $\rho$ et $\rho'$ ($\rho'$ est plus grand que $\rho$). On peut trouver un entier $\nu$ assez grand pour que, $n$ étant égal ou supérieur à $\nu$, $|f'(a_n z)|$ soit inférieur à $\varepsilon$, quel que soit $z$ dans S'. Si l'on prend $\rho$ et $\rho'$ de telle manière que, pour les mêmes valeurs de $n$, $a_{n+1}\rho$ soit au plus égal à $a_n\rho'$, on voit aussitôt que l'affixe de tout point $\zeta$ compris entre OA', OB' et extérieur au cercle de centre O et de rayon $a_\nu\rho'$ est égal à $a_n z$, $z$ étant un point de S' et $n$ étant au moins égal à $\nu$: par suite, $|f'(\zeta)|$ est inférieur à $\varepsilon$, quel que soit $\zeta$. Il suffit de faire, par exemple, $a_n = n^2$ et $\rho' = 4\rho$. La fonction $f'(z)$ tend donc uniformément vers o, quand $z$ s'éloigne à l'infini entre OA' et OB' (OA' et OB' étant deux droites quelconques comprises dans l'angle AOB).

Si le module de la fonction $\frac{f(z)}{z^p}$ ne croît pas au delà de toute limite quand $z$ s'éloigne à l'infini $OA_1$ et $OB_1$, on voit de même, en considérant la série $\sum \frac{f(a_n z)}{a_n^{p+1}}$, que $f^{p+1}(z)$ et les dérivées suivantes tendent vers o.

Le théorème est encore vrai si la partie réelle (ou imaginaire) $v(x, y)$ de $f(z)$ est telle que $\left|\frac{v(x, y)}{z^p}\right|$ ne croisse pas indéfiniment quand $z$ s'éloigne à l'infini entre $OA_1$ et $OB_1$.

Il peut arriver évidemment que $|f(z)|$ ne croisse pas indéfiniment dans

une direction OA, sans que $f'(z)$ tende vers O dans cette direction. Mais, dans ce cas, $|f(z)|$ croît au delà de toute limite pour des directions infiniment voisines. La fonction $\sin(z)$ est un exemple de ce fait.

## CHAPITRE II.

1. Soit $F(z)$ une fonction de $z$ définie dans une aire S de contour $s$, où elle est uniforme : AB étant un fragment de $s$, la fonction $F(z)$ est dite *continuable* au delà de AB s'il existe une fonction $f(z)$ définie de part et d'autre de AB, coïncidant avec $F(z)$ dans une portion finie de S attenante à AB, et holomorphe pour tous les points $\zeta$ de AB, sauf pour des points ne formant pas sur AB de suite linéaire : autrement dit, pour chaque point $\zeta$ de AB (à l'exception peut-être des points $\alpha$ d'un ensemble ponctuel), il existe une fonction $f(z)$ représentée par une série de Taylor $f(z) = \Sigma a_n(z-\zeta)^n$, et qui coïncide avec $F(z)$ dans une portion de S. Il est clair que, pour chaque point $\zeta$, il ne saurait exister qu'une seule série $f(z)$ : c'est ce qu'on exprime en disant qu'une fonction continuable n'est continuable que d'une seule manière. La coupure AB est dite alors *coupure artificielle* de la fonction $F(z)$ : c'est une coupure *essentielle*, si la fonction $F(z)$ n'est pas continuable au delà de AB.

Une condition nécessaire (mais évidemment insuffisante) pour que la coupure AB soit artificielle est que $F(z)$ tende vers une valeur $F_1(\zeta)$ quand le point $z$ de S tend vers un point $\zeta$ de AB (à l'exception peut-être des points $\zeta$ d'un ensemble ponctuel). Pour trouver la condition suffisante, nous nous nous appuierons sur quelques lemmes très simples, qui ressortent de la théorie de la continuité et que nous énoncerons tout d'abord.

2. *Lemme I.* — Soit une fonction quelconque $f$ des deux variables réelles $x, y$, uniforme et continue dans l'aire S. Si à tout point M de AB correspond un chemin MN variant avec M d'une manière continue, et tel que, le point $(x, y)$ de S tendant vers M sur MN, $f(x, y)$ tende uniformément le long de AB vers la valeur $f_1(s)$ ($s$ désignant l'arc AM) : 1° *$f_1(s)$ est une fonction continue de $s$*; 2° *$f(x, y)$ tend vers $f_1(s)$ quand $(x, y)$ tend vers* M *d'une façon quelconque.*

Si petit que soit le nombre positif $\varepsilon$, il existe une longueur $\lambda$ telle qu'en prenant sur chaque chemin MN la longueur $MP = \lambda$, pour tout point $(x, y)$ de MP, $|f(x, y) - f_1(s)|$ soit inférieur à $\varepsilon$. Quand M parcourt AB, P décrit une ligne continue $\sigma$. Désignons par $\xi$, $\eta$ les coordonnées de P, par M′ un point de AB voisin de M et correspondant à l'arc $s + h$ :

$$f_1(s+h) - f_1(s) = [f_1(s+h) - f(\xi', \eta')] + [f(\xi', \eta') - f(\xi, \eta)] + [f(\xi, \eta) - f(s)].$$

La fonction $f(\xi, \eta)$ étant continue, et le point $(\xi, \eta)$ variant avec M d'une manière continue, on peut trouver sur AB deux points $M_1$, $M_2$ de part et d'autre de M, tels que, M′ variant entre $M_1$ et $M_2$, $|f(\xi', \eta') - f(\xi, \eta)|$ soit inférieur à $\varepsilon$. Il existe donc un nombre $k$, tel que, $|h|$ étant compris entre $+k$ et $-k$, on ait

$$|f_1(s+h) - f_1(s)| < 3\varepsilon,$$

ce qui montre que $f_1(s)$ est continue. D'autre part, soit $(x, y)$ un point intérieur au quadrilatère curviligne $M_1P_1M_2P_2$, formé par AB, $\sigma$, $M_1P_1$, $M_2P_2$ ; ce point est situé sur la ligne M′P′, et

$$f(x, y) - f_1(s) = [f(x, y) - f_1(s+h)] + [f_1(s+h) - f(s)];$$

par suite, on a

$$|f(x, y) - f_1(s)| < 4\varepsilon.$$

On peut donc décrire du point M comme centre un cercle C de rayon assez petit pour que, $(x, y)$ étant un point de S intérieur à C, cette condition soit réalisée. Il en résulte que $f(x, y)$ tend vers $f_1(s)$ quand $(x, y)$ tend vers M d'une façon quelconque.

*Lemme II.* — Inversement, *si $f(x, y)$ tend vers $f_1(s)$, le point $(x, y)$ de S tendant vers M sur un chemin quelconque, $f_1(s)$ est fonction continue de $s$, et $f(x, y)$ tend uniformément vers $f_1(s)$ le long de* AB.

En effet, à chaque point M (y compris les points A et B) correspond un cercle C de centre M et de rayon $r$, tel qu'on ait, pour tout point $(x, y)$ de S intérieur à C,

$$|f(x, y) - f_1(s)| \leq \varepsilon.$$

[Autrement, il existerait, comme on le voit sans peine, des chemins MN tels que $|f(x, y) - f_1(s)|$ fût supérieur à $\varepsilon$ pour des points $(x, y)$ de MN aussi voisins de M que l'on voudrait, ce qui est contraire à l'hypothèse.]

Soient donc $M_1$ et $M_2$ les extrémités des deux arcs $MM_1$, $MM_2$, dont la longueur est $r$; M′ étant compris entre $M_1$ et $M_2$, faisons tendre vers M′ le point $(x, y)$ de C; $f(x, y)$ tend vers $f_1(s+h)$ et, d'autre part, si l'on pose $f(x, y) - f_1(s) = \eta$, on a constamment $|\eta| \leq \varepsilon$; par suite, $\lim |\eta|$ ou $|f_1(s+h) - f_1(s)|$ est au plus égal à $\varepsilon$. La fonction $f_1(s)$ est donc continue.

De plus, $M'_1$ et $M'_2$ désignant les milieux des arcs $M_1M$, $M_2M$, à tout point M′ de l'arc $M'_1M'_2$ correspond un cercle C′ de centre M′ et de rayon au moins égal à $\frac{r}{2}$, tel que, $(x, y)$ étant un point de S intérieur à C,

$$|f(x, y) - f_1(s+h)|$$

soit au plus égal à $2\varepsilon$. En raisonnant sur $M'_1$ et $M'_2$ comme sur M, et ainsi de suite, on atteindra les extrémités A, B de l'arc AB, à moins que le rayon $r$ des cercles C ne tende vers o, quand leur centre M tend vers un certain point L; mais ceci est impossible, car à ce point L correspond un cercle $C_1$, de rayon $r_1$, tel que, $(x, y)$ variant à l'intérieur de $C_1$, $|f(x, y) - f_1(s)|$ ne soit pas supérieur à $\frac{\varepsilon}{2}$, et, par suite, aux points M voisins de L correspondent des cercles C de rayon au moins égal à $\frac{r_1}{2}$. En définitive, on peut trouver une certaine longueur $\rho$, telle que, $(x, y)$ étant un point de S intérieur à un cercle C de centre M et de rayon $r$, on ait, quel que soit M sur AB,

$$|f(x, y) - f_1(s)| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui prouve que $f(x, y)$ tend uniformément vers $f_1(s)$ le long de AB.

On dit, dans ce cas, que la fonction $f(x, y)$ *prend sur* AB *les valeurs* $f_1(s)$ : la fonction est *continue dans* S *et sur* $s$.

On peut compléter ces remarques par les suivantes : soit une fonction $f(x, y)$ définie de part et d'autre de AB dans des aires S et S′ où elle est uniforme et continue; si à chaque point M de AB correspond un chemin $NMN_1$ variant avec M d'une manière continue, et tel que, les points $(x, y)$ et $(x_1, y_1)$ de S et de S′ tendant vers M sur $NMN_1$, $f(x, y) - f_1(x_1, y_1)$ tende uniformément le long de AB vers la valeur $\varphi(s)$ : 1° $\varphi(s)$ *est une fonction continue de* $s$; 2° *la fonction* $f(x, y)$ *définie dans* S *prend sur* AB *une suite continue de valeurs* $f_1(s)$, *et la fonction* $f_1(x_1, y_1)$ *définie dans* S′ *prend sur* AB *les valeurs* $f_1(s) + \varphi(s)$.

On part encore de ce fait qu'il existe une longueur $l$ telle, qu'en prenant sur $MNM_1$ les arcs MP et $MP_1$ de longueur $l$, on ait, si $(x, y)$ est un point de

MP, $x_1 y_1$ un point de $\mathrm{MP}_1$, $|f(x,y) - f(x_1, y_1) - \varphi(s)| < \varepsilon$, quel que soit le point M sur AB. Le raisonnement s'achève comme précédemment.

De même, si la différence $f(x,y) - f(x_1, y_1)$ tend vers $\varphi(s)$ quand le point $(x,y)$ de S et le point $(x_1, y_1)$ de S' tendent vers M d'une manière quelconque, la fonction $\varphi(s)$ est continue, et les fonctions $f(x,y)$ et $f(x_1, y_1)$ prennent sur AB une suite continue de valeurs.

De ce qui précède, il résulte qu'il est impossible que $f(x,y)$ prenne sur AB une suite discontinue de valeurs. Il arrive qu'à chaque point M de AB correspond un chemin MN, tel que $f(x,y)$ tende sur ce chemin vers $f_1(s)$, $f_1(s)$ étant discontinue; mais sur des chemins infiniment voisins de MN, la valeur de $f(x,y)$ ne tend vers aucune limite ou tend vers une limite différente de $f_1(s)$. On le voit directement, en remarquant qu'il existe des points M' aussi voisins de M que l'on veut sur AB, pour lesquels $|f_1(s+h) - f_1(s)|$ est supérieur à un certain nombre $\alpha$. Si l'on prend sur MN, M'N' deux points $(x,y)$, $(x', y')$ très voisins de M et de M', $f(x,y)$ et $f(x', y')$ diffèrent très peu de $f_1(s)$ et $f_1(s+h)$, et sur un chemin quelconque joignant ces deux points, $f$ prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f(x,y)$ et $f(x', y')$ : pour des points $(x, y)$ aussi voisins de M que l'on veut, $|f(x,y) - f_1(s)|$ est donc supérieur à une certaine valeur.

La même singularité peut se présenter, $f_1(s)$ étant continue. Supposons par exemple que la courbe $s$ soit formée d'un segment de $Ox$ et d'un demi-cercle ayant l'origine pour centre. La fonction $e^{-\frac{1}{z^4}}$, continue dans S, tend sur la normale en M à $s$ vers une valeur $f_1(s) + i f_2(s)$, fonction continue de l'arc $s$. En particulier, quand $z$ tend vers l'origine sur l'axe des $y$, $e^{-\frac{1}{z^4}}$ tend vers 0; mais, pour d'autres directions OM, $\left|e^{-\frac{1}{z^4}}\right|$ croît au delà de toute limite (¹).

Il importe aussi de faire la remarque suivante : soit $F(z)$ une fonction de

---

(¹) Soit encore un cercle C de centre O et de rayon R. La fonction

$$f(z) = e^{-\frac{1}{(z-\alpha)^4}} = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

($\alpha$ désignant un point de la circonférence C) est holomorphe dans C, et quand $z$ tend vers un point $\zeta$ de C sur un rayon OM, $f(z)$ tend vers la valeur $f_1(\zeta) = \varphi_1(s) + i\psi_1(s)$, fonction continue de l'arc $s$ de C. Mais $|f(z)|$ croît au delà de toute limite quand $z$ tend vers $\alpha$ sur certaines directions. Il existe une fonction $V(x,y)$ et une seule, satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$, régulière dans C, et *prenant* sur $s$ les valeurs $V_1(s)$ ($V_1$ étant fonction con-

$z$ holomorphe dans S, et continue sur $s$, si l'on trace dans S un chemin ANB quelconque,

$$\int_{ANB} F(z)\,dz = \int_{AB} F(z)\,dz.$$

Tout d'abord, si AN′B est un second chemin tracé dans S, on voit aussitôt que

$$\int_{ANB} F(z)\,dz = \int_{AN'B} F(z)\,dz.$$

Par chaque point M de AB menons une parallèle à $Ox$ et prenons sur cette parallèle une longueur $MP = l$, telle que, $z_1$ désignant l'affixe de M, $z$ l'affixe de P, on ait, quel que soit M sur AB,

$$|F(z_1) - F(z)| < \varepsilon.$$

Par suite, comme $dz_1 = dz$,

$$\int_{AB} F(z_1)\,dz_1 = \int_{P_1P_2} F(z)\,dz + \eta_1,$$

$|\eta_1|$ étant inférieur à $\varepsilon s_1$, si $s_1$ est la longueur de l'arc AB. D'autre part.

$$\left|\int_{AP_1} F(z)\,dz\right| \quad \text{et} \quad \left|\int_{BP_2} F(z)\,dz\right|$$

---

tinue de $s$). Cette fonction est donnée par l'intégrale connue

$$V(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{(1-a^2)V_1(s)\,ds}{r^2}.$$

[En s'appuyant sur ce que $V_1(s)$ est uniformément continue sur C, on démontre, en effet, que $V(x,y)$ tend *uniformément* vers $V_1(s)$ le long de C.] Cette fonction V peut se déduire également du développement de $V_1(s)$ en série de Fourier, comme on le voit sans peine en remarquant que cette série converge uniformément. Prenons en particulier $V_1(s) = \varphi_1(s)$: la fonction $V(x,y) - \varphi(x,y)$ est régulière dans C et tend vers o quand $(x,y)$ tend vers C sur un rayon OM; mais elle n'est pas identiquement nulle. Le point $\alpha$ considéré plus haut étant quelconque, on voit qu'il existe une infinité de fonctions V régulières dans C et tendant vers zéro quand le point $(x,y)$ tend vers C sur la normale. Il existe en conséquence une *infinité* de fonctions $V(x,y)$ satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$, régulières dans une aire S de contour $s$, et tendant vers la suite continue de valeurs $V_1(s)$ quand $x, y$ tend vers $s$ sur la normale à cette courbe. Si $V_1(s)$ est discontinue en certains points $a, b, c, \ldots$ de C, il existe encore une infinité de fonctions tendant vers $V_1(s)$ sur chaque normale à C (sauf pour les points $a, b, \ldots$): pour ces points, la fonction $V(x,y)$ qu'on déduit de la série de Fourier tend sur la normale à C vers $\frac{V_1(s+0)+V_1(s-0)}{2}$, *mais ce n'est pas la seule.*

sont inférieurs respectivement à $M_1 l$ et $M_2 l$, $M_1$ et $M_2$ étant les modules maxima de $F(z)$ sur $AP_1$ et sur $BP_2$. Il en résulte qu'on peut prendre la longueur $l$ assez petite pour que l'on ait

$$\left| \int_{AP_1P_2B} F(z)\,dz - \int_{AB} F(z)\,dz \right| < \sigma,$$

$\sigma$ étant un nombre positif aussi petit qu'on veut; mais

$$\int_{AP_1C_2B} F(z)\,dz = \int_{ANB} F(z)\,dz.$$

Cette dernière intégrale est donc égale à $\int_{AB} F(z)\,dz$.

On en conclut immédiatement que, si $s'$ désigne le contour formé par AB et une ligne ANB de S, $x$ étant un point intérieur à ce contour,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{s'} \frac{F(z)\,dz}{z-x} = F(x).$$

Cette égalité est encore vraie quand $F(z)$ est *continue sur* AB, *sauf en certains points* $a, b, c, \ldots$ ne formant pas un ensemble linéaire, pourvu que, si l'on trace dans S une ligne $\sigma$ (formée de plusieurs parties) et séparant les points $a$, $b$, $c$, ... du reste de S, $\left|\int_\sigma \frac{F(z)\,dz}{z-x}\right|$ tende vers o avec la longueur totale de $\sigma$. Cette condition est toujours remplie quand $|F(z)|$ ne croît pas dans le voisinage de AB au delà de toute limite. Au cas contraire, l'intégrale $\int_{s'} \frac{F(z)\,dz}{z-x}$ peut avoir un sens et ne pas représenter $F(x)$. Par exemple, supposons que $s'$ soit formé d'un segment de $Ox$ et d'un demi-cercle ayant son centre à l'origine, $\int_{s'} \frac{e^{-\frac{1}{z^2}}\,dz}{z-x}$ n'a pas pour valeur $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

*Lemme III.* — Si une fonction $f(x, y)$ uniforme dans S admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ continues dans cet espace et prenant sur AB les valeurs $f_x(s)$, $f_y(s)$, *la fonction* $\frac{df}{dl}$ (*l désignant une direction quelconque*) *prend aussi sur* AB *une suite continue de valeurs* $f_l(s)$, *et la valeur du rapport* $\frac{f(x,y) - f_1(s)}{\Delta l}$ *tend vers* $f_l(s)$ *quand le point* $(x, y)$ *de* S *tend vers* M *sur une parallèle* MN *à* $l$.

Soit $\alpha$ l'angle que fait avec $Ox$ la direction $l$:

$$\frac{df}{dl} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{df}{dy}\sin\alpha;$$

donc $\frac{df}{dl}$ prend sur AB la suite continue de valeurs $f_x(s)\cos\alpha + f_y(s)\sin\alpha$. D'autre part, $(x, y)$, $(x_0, y_0)$ étant deux points de S,

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

L'intégrale qui figure dans ce second membre est prise le long d'un chemin quelconque de S joignant les points $(x_0, y_0)$ et $(x, y)$. Si l'on fait tendre $(x, y)$ vers le point M $(\xi, \eta)$ de AB, on voit aussitôt que l'intégrale tend vers une valeur indépendante du chemin d'intégration; la fonction $f(x, y)$ est donc continue sur la ligne AB, $f_1(s)$ est sa valeur au point M. Considérons un second point M′ de AB

$$f_1(s) - f_1(s') = \int_{\xi', \eta'}^{\xi, \eta} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

l'intégrale étant prise le long d'une ligne quelconque de S joignant $(\xi', \eta')$ et $(\xi, \eta)$. On démontre, comme pour l'intégrale $\int F(z)\,dz$, que

$$\int_{\xi', \eta'}^{\xi, \eta} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \int_{M'M} f_x(s)\,dx + f_y(s)\,dy.$$

Ceci posé, soit un point P ou $(x, y)$ de S, situé sur une parallèle MP à $l$, et désignons par $\Delta l$ la longueur MP précédée du signe + ou −, suivant que les deux directions $l$ et MP sont de même sens ou de sens contraire,

$$f(x, y) - f_1(s) = \int_{\xi, \eta}^{x, y} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

(l'intégrale étant prise le long de MP); par suite

$$f(x, y) - f_1(s) = [f_x(s) + \varepsilon](x - \xi) + [f_y(s) + \varepsilon'](y - \eta),$$

$\varepsilon$ et $\varepsilon'$ tendant vers o avec $\Delta l$. On a donc

$$\lim \frac{f(x, y) - f_1(s)}{\Delta l} = f_x(s)\cos\alpha + f_y(s)\sin\alpha = f_l(s).$$

De plus, $(\xi', \eta')$ étant un second point de AB,

$$f_1(s') - f_1(s) = \int_{MM'} f_x(s)\,dx + f_y(s)\,dy.$$

On en conclut que $f_1(s)$ admet une dérivée $f'_1(s)$, égale à

$$f_x(s)\cos\beta + f_y(s)\sin\beta$$

($\beta$ désignant l'angle avec $Ox$ de la tangente en M à l'arc AB menée dans le sens des arcs croissants).

Le raisonnement s'étend au cas où les axes $Ox$ et $Oy$ ne sont pas rectangulaires.

En particulier, si $u = f(z)$ est une fonction holomorphe dans S et si sa dérivée $f'(z)$ tend vers $f'(\zeta)$ quand $z$ tend vers un point $\zeta$ de AB, $\lim \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = f'(\zeta)$; de plus, $\frac{f(\zeta_1) - f(\zeta)}{\zeta_1 - \zeta}$ tend vers $f'(\zeta)$ quand $\zeta_1$ tend vers $\zeta$ sur AB. On voit que la courbe A'B', que décrit le point $u$ quand $z$ décrit AB, a une tangente en chaque point, et qu'à toute courbe MN, décrite par $z$ dans S et coupant AB sous un certain angle, correspond dans le plan des $u$ une courbe M'N' coupant A'B' sous le même angle.

Une fonction $f(x, y)$ peut prendre sur AB les valeurs $f_1(s)$, $f_1(s)$ admettant une dérivée $f'_1(s)$, sans que les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, continues dans S, tendent vers une limite le long de AB. Il est facile de former des exemples de cette singularité qui *se présente nécessairement si $f'_1(s)$ est discontinue*, $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ étant continues le long de AB. Mais nous démontrerons dans la suite que, si une fonction $f(z)$ holomorphe dans S prend sur AB les valeurs $f_1(s)$, $f_1(s)$ admettant une dérivée continue $f'_1(s)$, *la dérivée $f'(z)$ prend nécessairement sur* AB *les valeurs* $f'(\zeta) = f'_1(s)\frac{ds}{d\zeta}$ (ceci suppose toutefois que, le long de AB, les dérivées $\frac{d\zeta}{ds}$, $\frac{d^2\zeta}{ds^2}$ existent et soient continues).

Une dernière conséquence est relative aux fonctions $V(x, y)$ régulières dans S et satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$. Si les dérivées $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$ prennent sur le contour $s$ une suite continue de valeurs, il en est de même de $V(x, y)$; de plus, on peut prendre sur chaque normale MN à $s$ une longueur $MP = l$ assez petite pour que, les points $(x, y)$ et $(x_1, y_1)$ étant compris entre M et P,

$\left| \frac{dV(x,y)}{dn} - \frac{dV(x_1,y_1)}{dn} \right|$ soit inférieur à $\varepsilon$ ($n$ désigne la direction MN). Il en résulte aussitôt que

$$\frac{1}{2\pi}\int_s \left[ V_1(s)\frac{dLr}{dn} - \frac{dV_1}{dn}(s)Lr \right] ds = V(x,y)$$

$[r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, $(x,y)$ est un point de S, $(x_0,y_0)$ un point de $s]$. Cette égalité subsiste si $\frac{\partial V}{dx}, \frac{\partial V}{\partial y}$ sont discontinues en certains points de $s$, ne formant pas un ensemble linéaire, pourvu que les modules de $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ ne croissent pas dans S au delà de toute limite. Pour qu'elle soit exacte, il suffit encore que V soit continue sur $s$, et qu'à tout nombre $\varepsilon$ corresponde une longueur $l$, telle qu'en prenant sur chaque normale MN à $s$ la longueur $\mathrm{MP} = l$, on ait, pour deux points quelconques $(x,y)$, $(x_1,y_1)$ de MP,

$$\left| \frac{dV(x,y)}{dn} - \frac{dV(x_1,y_1)}{dn} \right| < \varepsilon.$$

Les lemmes (I), (II) et (III) s'étendent évidemment, ainsi que les remarques qui s'y rattachent, aux fonctions $f(x,y,z)$ de trois variables réelles, et en particulier aux fonctions $V(x,y,z)$ qui satisfont à l'équation $\Delta V = 0$.

3. Nous pouvons dès lors énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Soit une fonction $f(z)$ holomorphe dans l'aire* S *de contour $s$, et prenant sur l'arc* AB *de $s$ les valeurs $f_1(s)$. S'il existe une fonction $\varphi(z)$, holomorphe dans un espace* S' *extérieur à* S *et attenant à* AB, *qui prenne sur* AB *les valeurs $f_1(s)$, la fonction $F(z)$ égale à $f(z)$ dans* S, *à $\varphi(z)$ dans* S', *est holomorphe dans l'aire totale* $\Sigma$ *formée par les deux aires* S et S'.

En effet, traçons dans S et S' les chemins ANB, AN'B. Si $x$ désigne un point intérieur au contour ABNA, $x'$ un point intérieur au contour ABN'A, on a (le sens AB étant le sens direct du premier contour)

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{ABNA}} \frac{f(z)\,dz}{z-x}, \qquad 0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{BAN'B}} \frac{\varphi(z)\,dz}{z-x},$$

$$\varphi(x') = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{BAN'B}} \frac{\varphi(z)\,dz}{z-x'}, \qquad 0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{ABNA}} \frac{f(z)\,dz}{z-x'}.$$

Par suite,

$$2i\pi F(x) = \int_{ABNA} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \int_{BAN'B} \frac{\varphi(z)\,dz}{z-x}$$
$$= \int_{BNA} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \int_{AN'B} \frac{\varphi(z)\,dz}{z-x} + \int_{AB} \frac{f(z)-\varphi(z)\,dz}{z-x}$$
$$= \int_{\sigma} \frac{F(z)\,dz}{z-x}$$

($\sigma$ représentant le contour AN'BNA). La fonction $F(x)$ est donc holomorphe dans $\Sigma$.

On peut remarquer que le théorème subsiste, si à tout le nombre $\varepsilon$ correspondent des longueurs $l$ et $l'$ et pour chaque point M de AB un chemin N'MN variant avec M d'une manière continue et tel qu'en prenant sur N'MN, de part et d'autre de M, les longueurs $MP = l$, $MP' = l$, on ait, quel que soit M, $|f(z) - \varphi(z')| \leq \varepsilon$, $z$ et $z'$ étant les affixes des points P et P'. Cette condition est remplie par exemple si, $z$ et $z'$ étant deux points situés sur la normale en M à AB à la même distance $d$ de M, on peut prendre la longueur $d$ assez petite pour que $|f(z) - \varphi(z')|$ soit inférieur à $\varepsilon$ le long de AB.

D'après le théorème qui précède, on voit qu'une fonction $F(z)$ *uniforme et continue dans une aire* S *est holomorphe dans* S *ou y présente des espaces lacunaires;* car, si elle est holomorphe en chaque point de S, sauf peut-être sur certaines lignes, elle est aussi holomorphe en chaque point de ces lignes.

Ce théorème permet également d'énoncer la proposition suivante :

*Pour qu'une fonction $f(z)$ définie du côté* C *de* AB *et holomorphe dans le voisinage de* AB *soit continuable au delà de cette ligne, il faut et il suffit qu'il existe une fonction de $z$, $\varphi(z)$ définie du côté opposé* C' *de* AB, *uniforme dans le voisinage de* AB *et prenant la même valeur que $f(z)$ en chaque point de cette ligne* (à l'exception peut-être des points d'un ensemble ponctuel).

En particulier, si une fonction $f(z)$ holomorphe dans l'aire S de contour $s$ prend sur une portion quelconque AB de $s$ une valeur constante, elle est une constante dans S. Par suite, si deux fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$, holomorphes dans S, prennent sur la coupure AB les mêmes valeurs, elles coïncident dans S ; car la différence $f(z) - f_1(z)$, nulle sur AB, est nulle dans S.

Les raisonnements qui précèdent supposent que la courbe AB admet en chaque point M (sauf aux points d'un ensemble ponctuel) *une tangente*

*variant avec* M *d'une manière continue.* On peut donner de la dernière proposition une démonstration qui s'applique à une courbe *continue quelconque.*

Il suffit de prouver que, si la fonction $f(z)$ holomorphe dans S s'annule le long de AB, elle est nulle dans S. Soit $z_0$ et $z_1$ deux points de AB; posons $z' = (z - z_0)(\cos\alpha + i \sin\alpha)$; à la ligne AB et à l'aire S correspondent une ligne A'B' et une aire S' qu'on obtient en faisant tourner AB et S de l'angle $\alpha$ autour du point $z_0$. Posons de même $z'' = (z - z_1)(\cos\beta + i \sin\beta)$; à AB et à S correspondent A''B'' et S''. En prenant les points $z_0$, $z_1$ assez voisins, on peut choisir les angles $\alpha$ et $\beta$ de telle sorte que les aires S, S', S'' aient une partie commune $\Sigma$ limitée par des fragments de AB, A'B', A''B''. Considérons le produit $f(z)f(z')f(z'')$. C'est une fonction de $z$ holomorphe dans $\Sigma$, car $f(z)$ est holomorphe dans S, $f(z')$ dans S', $f(z'')$ dans S''. De plus, ce produit $P + iQ$ s'annule sur le contour $\sigma$ de $\Sigma$. Les deux fonctions P, Q, régulières dans $\Sigma$, satisfont dans cette aire aux équations $\Delta P = 0$, $\Delta Q = 0$ et s'annulent sur $\sigma$; elles sont donc identiquement nulles. Il en résulte qu'un au moins des trois facteurs et, par suite, les trois facteurs du produit, sont nuls dans $\Sigma$. La fonction $f(z)$ est nulle dans l'aire S.

Ajoutons encore que, si la fonction $f(z)$ est continue le long de AB et s'annule en des points formant un ensemble linéaire ayant AB pour limite, $f(z)$ s'annule le long de AB; autrement, elle prendrait pour des points infiniment voisins des valeurs discontinues; elle est donc identiquement nulle dans S.

Nous allons appliquer immédiatement les remarques précédentes à l'étude de quelques propriétés des fonctions définies par une relation implicite ou une équation différentielle.

4. *Théorèmes sur les fonctions implicites.* — Soit $f(z, u)$ une fonction uniforme de deux variables $z$ et $u$, holomorphe quel que soit $u$ (sauf pour $u\infty$) quand $z$ varie dans une aire simple S. Si l'équation en $u$, $f(z_0, u) = 0$, ($z_0$ étant un point de S), a une infinité de racines, *les points $z$ pour lesquels l'équation n'a qu'un nombre donné, $n$, de racines forment au plus dans $\Sigma$ une suite ponctuelle,* $\Sigma$ étant un espace quelconque intérieur à S, sans points communs avec son contour $s$.

Supposons que la fonction $f(z, u)$ s'annule pour $z = z_0$, $u = u_0$. Quand $\frac{\partial f}{\partial u}(z_0, u_0)$ n'est pas nul, l'équation $f(z, u) = 0$ définit une fonction de $u$ égale à $u_0$ pour $z = z_0$, et homolorphe dans le voisinage de $z = z_0$. Quand

$\frac{\partial f}{\partial u}(z_0, u_0) = 0$, une dérivée $\frac{\partial^p f}{\partial u^p}$ ne s'annule pas pour $u_0$, $z_0$ [autrement, $f(z_0, u)$ est nulle identiquement, et $f(z, u)$ contient en facteur une puissance de $(z - z_0)$ qu'on peut supprimer]. La relation $f = 0$ définit alors une fonction égale à $u_0$ au point $z_0$ et admettant ce point comme point critique algébrique : $u$ est dans tous les cas développable suivant les puissances de $(z - z_0)^{\frac{1}{p+1}}$, à l'intérieur d'un certain cercle C. Ces propriétés rappelées, traçons dans S un chemin quelconque L de longueur finie joignant les points $z_0$, $z$. Prenons sur L un point $z'$ intérieur à C. La fonction $u$ est égale à $u'$ en $z'$ (si $z_0$ est un point critique de $u$, on choisit arbitrairement une des $p + 1$ valeurs de $u$). En raisonnant sur $z'$ comme sur $z_0$, et ainsi de suite, on arrive à un cercle comprenant $z$ à son intérieur, à moins que le chemin $z_0 z$ ne rencontre un point singulier de $u$. Soit $\zeta$ ce point, je dis que, *quand $z$ tend vers $\zeta$, $u$ tend vers l'infini.* En effet, $u$ ne peut tendre vers une valeur finie V; car le couple $(\zeta, v)$ serait analogue au couple $(z_0, u_0)$. Supposons que $u$ soit indéterminé; il existe alors un nombre R tel que $|u(z)|$ soit inférieur à R pour des points $z$ de L compris entre $z'$ et $\zeta$, si voisin que $z'$ soit de $\zeta$, et un nombre $\rho$ tel que pour des points $z$ et $z_1$, compris entre $z'$ et $\zeta$, on ait $|u(z) - u(z_1)| > \rho$. A l'intérieur du cercle C, décrit dans le plan des $u$ de l'origine comme centre avec R comme rayon, l'équation $f(\zeta, u) = 0$ a un nombre fini de racines $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$, qui varient avec $\zeta$ d'une manière continue. (Quand un de ces points est sur $C_1$, on donne à R une valeur un peu plus grande.) Traçons dans le plan des $z$ un cercle $\gamma$ de centre $\zeta$ et de rayon assez petit pour que $u_1, u_2, \ldots, u_\nu$ quand $z$ varie dans $\gamma$, restent compris dans des cercles $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ de rayon inférieur à $\frac{\rho}{2}$, sans points communs et intérieurs au cercle $C_1$. Soit enfin A le module minimum de $f(z, u)$ quand $z$ varie dans $\gamma$, et $u$ dans l'espace T intérieur à $C_1$ et extérieur aux cercles $c$. On peut toujours, ainsi qu'il sera démontré dans un instant, prendre $\gamma$ assez petit pour que A ne soit pas nul, c'est-à-dire pour que $f(z, u) = 0$ n'ait pas dans C d'autres racines que les $\nu$ valeurs $u_1, \ldots, u_\nu$. Quand $z$ tend vers $\zeta$, $u$ qui varie avec $z$ d'une manière continue n'est ni constamment extérieur à $C_1$, ni constamment intérieur à un cercle $c$, sinon $|u(z) - u(z_1)|$ serait constamment inférieur à $\rho$. On voit donc que, pour des valeurs $z'$ de $z$ intérieures à $\gamma$, $u$ prend des valeurs $u'$ intérieures à T. Mais $|f(z', u')|$ est au moins égal à A, et, par hypothèse, $f(z', u') = 0$. La fonction $u(z)$ ne peut être indéterminée, et par suite tend vers l'infini quand $z$ tend vers $\zeta$.

Ce point établi, nous ferons encore les deux remarques suivantes, nécessaires à la démonstration : 1° *quand* $z_0$ *varie dans une aire* $\Sigma$ *intérieure à* S, *l'équation* $f(z_0, u) = 0$ *n'admet qu'un nombre fini* $q$ *de racines dont le module soit inférieur à un nombre donné* M. En effet, pour chaque point $z_0$ de $\Sigma$, l'équation n'admet qu'un nombre $q_0$ de racines répondant à la condition (en tenant compte des degrés de multiplicité). Il suffit de prendre pour valeur de $q$ le plus grand des nombres $q_0$, quand $z_0$ varie dans $\Sigma$. Ce maximum existe, autrement $q_0$ croîtrait indéfiniment quand $z_0$ tendrait vers un certain point $\zeta$. En ce point $\zeta$, l'équation n'admet qu'un nombre fini $p$ de racines (égales ou distinctes), de module égal ou inférieur à M; ces racines $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ sont développables dans un certain cercle, de centre $\zeta$ et de rayon $r$, suivant les puissances de $(z - \zeta)$ ou de $(z - \zeta)^{\frac{1}{k}}$ ($k$ étant un certain entier), et ces développements représentent toutes les racines de l'équation $f = 0$ qui tendent vers une des valeurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$ quand $z_0$ tend vers $\zeta$. Mais pour des points $z_0$ infiniment voisins de $\zeta$, l'équation devrait être satisfaite par des racines $u_0$ de module inférieur à M et distinctes des précédentes, par suite ne tendant vers aucune des valeurs $v_1, \ldots, v_p$, quand $z_0$ tend vers $\zeta$. Autrement dit, pour des points $z_0$ aussi rapprochés de $\zeta$ qu'on voudrait, l'équation admettrait des racines $u_0$ telles que les modules des différences $u_0 - v_1$, $u_0 - v_2, \ldots, u_0 - v_p$ fussent supérieurs à un certain nombre $h$. Or, soit A le module minimum de $f(\zeta, u)$ quand $u$ décrit l'espace T intérieur au cercle $C_1$ ayant M pour rayon et l'origine pour centre, et extérieur aux cercles $c$, de rayon $h$ et de centres $v_1, v_2, \ldots, v_p$. On peut décrire de $\zeta$ comme centre un cercle $\gamma$ de rayon assez petit pour que, $z$ variant dans $\gamma$ et $u$ dans T, on ait constamment

$$|f(\zeta, u) - f(z, u)| < \frac{A}{2}.$$

Or, pour un point $z'$ de $\gamma$ et $u'$ de T, on devrait avoir

$$f(z', u') = 0 \qquad \text{et par suite} \qquad |f(\zeta, u')| < \frac{A}{2},$$

ce qui est impossible, puisque $|f(\zeta, u')|$ est au moins égal à A.

2° Soit $f(z) = P + iQ$ une fonction analytique de $z$. On sait que, si $f(z)$ est holomorphe au point $z_0 = x_0 + iy_0$, les deux fonctions P et Q ne peuvent présenter au point $z_0$ ni maximum ni minimum. Il en est de même *si*

*$z_0$ est un point critique algébrique de $f(z)$*. En effet, on peut développer $f(z)$ de la manière suivante :

$$f(z) = P + iQ = (P_0 + iQ_0) + a(z - z_0)^{\frac{1}{p}} + \ldots.$$

Si $z$ décrit $p$ fois un petit cercle de centre $z_0$, $P + iQ$ décrit un contour enfermant $P_0 + iQ_0$ ; par suite, P prend des valeurs inférieures et supérieures à $P_0$ dans le voisinage de $x_0 y_0$, et la même chose a lieu pour Q et $Q_0$.

Nous pouvons démontrer maintenant le théorème énoncé. Pour $z = z_0$, l'équation a par hypothèse une infinité de racines. Considérons dans l'aire $\Sigma$ intérieure à S et comprenant $z_0$ tous les points $z'$ pour lesquels l'équation $f(z', u) = 0$ n'a pas plus de $n$ racines, et supposons que ces points forment un ensemble superficiel. Ils comprennent alors *tous* les points d'une certaine aire S' ; car, si pour un point $z_0$ l'équation $f(z_0, u) = 0$ a $n + 1$ racines, ces $(n + 1)$ racines peuvent se développer en série dans un certain cercle de centre $z_0$, et pour les points $z_1$ de ce cercle, l'équation a $(n + 1)$ racines. Cet espace S' est séparé du reste de $\Sigma$ par une ligne continue L, et pour tout point $z_0$ de L, l'équation $f(z_0, u) = 0$ n'a pas plus de $n$ racines ; sinon il en serait de même pour les points de S' voisins de $z_0$.

De même, si les points $z'$ forment un ensemble linéaire ayant pour limite une ligne L, pour tout point $z_0$ de L l'équation $f(z_0, u) = 0$ n'a pas plus de $n$ racines. Soit donc $\nu$ le nombre maximum des racines de $f(z_0, u) = 0$ quand $z_0$ décrit un segment de L ($\nu$ est inférieur ou égal à $n$). Pour $z_0 = \zeta$, l'équation $f = 0$ a $\nu$ racines. Si $\zeta$ est un point critique algébrique de l'une d'elles, on le remplace par un point $z_0$ voisin ; au point $z_0$ ainsi choisi, les $\nu$ racines sont holomorphes et développables en série de Taylor dans un certain cercle C de centre $z_0$.

Pour des points $z$ de C voisins de L et extérieurs à S' (si S' existe), l'équation $f(z, u) = 0$ admet des racines $u'$ distinctes des précédentes et ne se permutant pas avec elles à l'intérieur de C. Joignons $z$ à un point $z_0$ de L par un chemin de longueur finie contenu dans C : si la fonction $u'$ est définie le long de $\lambda$, elle tend vers l'infini quand $z$ tend vers $z_0$ sur $\lambda$ ; sinon, le chemin $\lambda$ renferme un point pour lequel $u'$ devient infinie.

Tout d'abord, si l'on peut séparer un nombre fini de valeurs de $u'$ qui ne se permutent qu'entre elles dans le voisinage de L, le produit $u'_1 \ldots u'_j$ est uniforme aux environs de L et doit tendre vers l'infini le long de cette ligne : le théorème établi dans le paragraphe précédent montre que c'est impossible.

Il faut donc supposer que les valeurs de $u'$ présentent dans le voisinage de L un nombre infini de points de ramification formant une suite linéaire. Appelons $C_1$ la partie de C extérieure à S'. D'après la remarque (1), il n'existe qu'un nombre fini $q$ de valeurs de $u'$ dont le module soit inférieur à un nombre donné M pour un point de C'. De plus, on peut toujours prendre le rayon de C assez petit pour qu'aucune de ces valeurs ne s'annule dans $C_1$; [il suffit que $C_1$ ne renferme aucun des zéros de la fonction $f(z, 0)$, lesquels sont nécessairement isolés dans S, puisque $f(z, 0)$ est holomorphe dans cette aire]. Soit donc N le module minimum dans $C_1$ de ces $q$ valeurs. Si nous posons $V = \frac{1}{u}$, la fonction $V(z)$ n'est indéterminée pour aucun point de $C_1$; tout point $z$ pour lequel une de ses valeurs ne s'annule pas est un point ordinaire ou un point critique algébrique de cette valeur. De plus, son module dans $C_1$ ne peut dépasser $\frac{1}{N} = N_1$, et elle n'admet qu'un nombre fini $q$ de déterminations dont le module pour un point de $C_1$ soit supérieur ou égal à un nombre donné $M_1$. Enfin, si l'on joint un point de $C_1$ à un point $z_0$ de L par un chemin $\lambda$, toutes les déterminations de $V(z)$ tendent vers zéro quand $z$ tend vers $z_0$ sur $\lambda$, ou quand $z$ rencontre des points intermédiaires. Ceci posé, employons le raisonnement qui nous a déjà servi à la fin du paragraphe précédent. Soient $z_0$ et $z_1$ deux points de L; on pose $z' = (z - z_0)(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z'' = (z - z_1)(\cos\beta + i\sin\beta)$, $z_0$, $z_1$, $\alpha$ et $\beta$ étant choisis de telle sorte que les aires $C'_1$ et $C''_1$ qui correspondent à $C_1$ aient avec $C_1$ une partie commune $\Sigma_1$ dont le contour $\sigma_1$ soit formé de fragments de L, L', L''. Considérons alors le produit $\varphi(z) = V(z)V(z')V(z'')$. Chacune des fonctions $V(z')$ et $V(z'')$ jouit dans $C'_1$ et $C''_1$, et par suite dans l'aire $\Sigma_1$, des propriétés énoncées pour $V(z)$. En conséquence, le produit $\varphi(z)$ ne peut être indéterminé en un point de $\Sigma_1$; si une valeur de $\varphi(z)$ ne s'annule pas en un point $z$, ce point est un point ordinaire ou algébrique de cette valeur. De plus, $|\varphi(z)|$ ne peut dépasser $N_1^3$ dans $\Sigma_1$; et, si $z$ décrit un chemin $\lambda$ joignant un point de $\Sigma_1$ à un point $z_0$ de $\sigma_1$, toutes les déterminations de $\varphi(z)$ s'annulent quand $z$ tend vers $z_0$ sur $\lambda$, ou rencontre des points intermédiaires. Enfin, $\varphi(z)$ n'étant pas identiquement nulle dans $\Sigma_1$, pour un point $z$ de cette aire, une valeur de $\varphi(z)$ a un certain module A.

D'autre part, chacune des trois fonctions V, V', V'' n'admet qu'un nombre fini $q$ de déterminations dont le module prenne dans $\Sigma_1$ une valeur supérieure ou égale à $\frac{A}{N_1^2}$. Si l'on considère une détermination de V qui ne satis-

fasse pas à cette condition, le produit $VV'V''$ a un module inférieur, dans $\Sigma_1$, à $\frac{A}{N_1^2}|V'|\times|V''|$ ou, *a fortiori*, à A. Il en est de même pour les déterminations analogues de $V'$ et $V''$. Pour tout point $z$ de $\Sigma_1$, il ne saurait donc exister que $q^3$ valeurs de $\varphi(z)$ au plus, dont le module soit supérieur ou égal à A. Formons pour chaque point de $\Sigma_1$ les $q^3$ valeurs de $\varphi(z)$ de plus grand module. Ces modules, étant inférieurs à $N_1^3$, admettent une valeur maxima P, qui correspond à un point $z'$ de $\Sigma_1$. Ce point $z'$ ne peut être sur le contour $\sigma_1$; autrement dit, le module d'une valeur de $\varphi(z)$ ne peut tendre vers P quand $z$ tend vers un point de L, puisque ce module doit tendre vers zéro. De plus, P n'étant pas nul, ce point $z'$ est un point ordinaire ou algébrique pour la valeur $\varphi(z')$ dont le module est P, ainsi que pour la fonction $\log\varphi(z) = LP(x, y) + i\theta$. Mais la valeur pour $z = z'$ de la fonction $LP(x, y)$ doit être supérieure ou égale aux valeurs qu'elle prend pour les points voisins, ce qui est impossible d'après la seconde remarque. Le théorème est donc démontré.

Nous avons supposé que pour toute valeur de $z$ intérieure à S la fonction $f(z, u)$ était holomorphe dans le plan des $u$. Mais le raisonnement s'applique aussi bien si, pour les mêmes valeurs de $z$, $f(z, u)$ admet, dans le plan des $u$, $m$ points essentiels $a_1, a_2, \ldots, a_m$ et des pôles en nombre quelconque ($a_1, \ldots, a_m$ étant des constantes).

On démontre alors, comme plus haut, que, si un point $z_0$ est un point singulier (non critique algébrique) d'une racine $u(z)$, cette racine tend nécessairement vers une des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_m$, quand $z$ tend vers $z_0$; en outre, si $z_0$ varie dans une aire $\Sigma$ intérieure à S, l'équation $f(z_0, u) = 0$ admet au plus un nombre $q$ de racines telles que le module du produit $(u - a_1)(u - a_2), \ldots, (u - a_m)$ soit supérieur à un nombre donné M. On pose $V(z) = (u - a_1), \ldots, (u - a_n)$; il suffit de répéter identiquement le raisonnement fait sur $V(z)$ dans le premier cas.

Le théorème subsiste encore si les affixes des points $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ne sont pas des constantes, mais dépendent analytiquement de $z$. A chaque point $z$ de S correspondent $m$ valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_m$ fonctions analytiques de $z$. Les quantités $\Sigma a_i$, $\Sigma a_i a_j$, ... sont dans S des fonctions uniformes de $z$, qui n'admettent que des pôles isolés; en conséquence, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sont racines d'une relation algébrique

$$U^m\varphi_m(z) + U^{m-1}\varphi_{m-1}(z) + \ldots + \varphi_0(z) = 0.$$

où $\varphi_m, \varphi_{m-1}, \ldots, \varphi_0$ sont holomorphes dans S. Il suffit de considérer le produit

$$V = \varphi_m \times (u - a_1) \ldots (u - a_n) = u^m \varphi_m(z) + u^{m-1} \varphi_{m-1}(z) + \ldots + \varphi_0(z),$$

et de raisonner sur V comme dans le premier cas. On voit que V devrait être identiquement nul, ce qui est impossible, puisque $f(z, u) = 0$ par hypothèse, et que $f(z, a_i)$ est indéterminée.

Nous pouvons, en définitive, énoncer le théorème suivant :

Théorème II. — Soit $f(z, u)$ une fonction uniforme des deux variables $z$ et $u$ telle que, pour toute valeur $z_0$ de $z$ intérieure à une aire S, la fonction $f(z_0, u)$ ne présente dans le plan des $u$ que $m$ points essentiels, dont les affixes sont des fonctions analytiques de $z$. *Si l'équation $f(z, u) = 0$ n'admet qu'un nombre n de racines pour des points $z'$ formant dans une aire $\Sigma$, intérieure à* S, *une suite linéaire, il en est de même pour tous les points $z$ de* S.

En effet, si L désigne une ligne limite de la suite des points $z'$, la démonstration précédente prouve que l'équation ne peut avoir plus de $n$ racines pour les points $z$, voisins de L. Considérons donc tous les points de S pour lesquels $f = 0$ n'a pas plus de $n$ racines. Ces points forment une certaine aire S'; si S' est intérieure à S, elle est séparée du reste de S par une ligne L', et pour des points $z$ voisins de L', intérieurs à S et extérieurs à S', l'équation $f = 0$ doit avoir plus de $n$ racines, ce qui est impossible. La fonction $u(z)$, définie par $f = 0$, n'admet dans S que $n$ valeurs au plus, et n'y est jamais indéterminée. On en conclut qu'elle vérifie une relation de la forme

$$\psi_n u^n + \psi_{n-1} u^{n-1} + \ldots + \psi_0 = 0,$$

$\psi_n, \psi_{n-1}, \ldots, \psi_0$ étant holomorphes dans S.

En particulier, supposons que la fonction $f$ satisfasse aux conditions précédentes pour tous les points $z_0$ du plan $z$, sauf pour les points $z_0$ d'une suite ponctuelle [ces points $z_0$ sont des points essentiels de la fonction $f(z, u_0)$, quel que soit $u_0$]. Si, pour un point $z_1$, l'équation en $u$, $f(z_1, u) = 0$, a une infinité de racines, les points $z$ pour lesquels elle n'en a qu'un nombre donné $n$ ne forment dans le plan qu'une suite ponctuelle. Les points $z_0$ sont les seuls où une racine $u$ puisse être indéterminée. Soit, par exemple, l'équation $e^u = f(z)$, où $f(z)$ est uniforme dans le plan des $z$ et admet des

points essentiels $z_0$ et des zéros $z'$ ayant ces points pour limites : pour tous les points $z'$, l'équation n'a pas de racines, et pour les points $z_0$, $u$ est indéterminée.

Considérons, pour terminer, une fonction $f(z, u)$ telle que, pour tout point $z_0$ de l'aire S, la fonction $f(z_0, u)$ présente dans le plan des $u$ des points essentiels formant une suite ponctuelle, les affixes de ces points $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ dépendant analytiquement de $z$. Les valeurs $a_1, \ldots, a_m, \ldots$ doivent donc être considérées comme les diverses déterminations d'une fonction analytique $A(z)$. Nous supposons qu'une quelconque de ces déterminations ne présente pas dans S une suite linéaire de points critiques. D'une manière plus précise, quand on part d'un point $z_0$ de S avec une détermination particulière $a_i(z_0)$ et qu'on fait varier $z_0$ de manière à le faire passer une fois et une seule par chaque point de S, en contournant tous les points critiques de la valeur $a_i(z)$ considérée, on définit une branche $a_i(z)$ pouvant présenter des coupures dans S et ne prenant qu'une valeur en tout point de S extérieur à ces coupures. Nous admettons que les points critiques de chacune de ces branches ne forment pas dans S une suite linéaire. Ces restrictions faites, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème III. — Si, pour tout point $z_0$ d'une aire S, la fonction $f(z_0, u)$ n'admet dans le plan des $u$ qu'une suite ponctuelle de points essentiels $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots$ (les affixes de ces points dépendant analytiquement de $z_0$), *toute racine $u(z)$ de l'équation $f(z, u) = 0$ uniforme (ou ne prenant que $n$ valeurs) dans une aire $\Sigma$ de contour $\sigma$, intérieure à* S, *est continuable au delà de $\sigma$, et ne présente dans $\Sigma$ que des pôles isolés (ou des points critiques algébriques).*

On établit encore que, si $\zeta$ est un point singulier d'une racine $u(z)$, $z$ tendant vers $\zeta$ sur un chemin $\lambda$ de longueur finie, $u(z)$ tend nécessairement vers une des valeurs $a_m(\zeta)$ et ne peut être indéterminée. La démonstration est la même que celle qui sera donnée d'une proposition analogue concernant les équations différentielles, et d'où résulte d'ailleurs la précédente. Les points singuliers de la fonction $u(z)$ dans $\Sigma$ ne peuvent donc être que des pôles (ou des points critiques algébriques). Admettons qu'elle soit uniforme dans $\Sigma$ et qu'elle présente une ligne singulière L : quand $z$ tend vers un point $\zeta$ de L sur un chemin $\lambda$, en restant du même côté de L, $u(z)$ tend vers une des valeurs $a_m(\zeta)$, qui est indépendante de $\lambda$ et varie avec $\zeta$ d'une

manière continue ; autrement, d'après les lemmes établis au début de ce Chapitre, $u(z)$ serait indéterminée quand $z$ tendrait vers L sur certains chemins. Les valeurs de $u(z)$ le long de L coïncident donc avec une détermination $a_m(z)$ de $A(z)$, qui, par hypothèse, ne présentant pas dans $\Sigma$ de suite linéaire de points critiques, est uniforme le long d'un certain segment L' de L. Les deux fonctions $u(z)$ et $a_m(z)$ uniformes d'un côté de L' dans le voisinage de cette ligne, et coïncidant le long de cette ligne, coïncident identiquement, d'après le théorème fondamental, ce qui est impossible puisque $f[a_m(z), z]$ est constamment indéterminée.

Le raisonnement subsiste si $u(z)$ prend dans $\Sigma$ les $n$ valeurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$, à condition de considérer le produit

$$[u_1 - a_{m_1}(z)][u_2 - a_{m_2}(z)] \ldots [u_n - a_{m_n}(z)],$$

qui s'annule sur L.

Quand $f(z, u)$ satisfait aux conditions énoncées, sauf pour des points $z_0$ de S qui ne forment pas de suite linéaire [ces points sont des points essentiels de $f(z, u_0)$, quel que soit $u_0$], la fonction $u(z)$ peut admettre ces points $z_0$ comme points d'indétermination (points essentiels), et, par suite, comme points limites de pôles ou de points critiques algébriques.

*Remarque.* — Si la fonction $f(z, u)$ est une fonction multiforme, mais peut être considérée comme définie par une relation $G(f, z, u) = 0$, G étant uniforme, on remplace l'équation $f = 0$ par $G(0, z, u) = 0$. Mais quand $f(z, u)$ est une fonction multiforme quelconque, les théorèmes précédents cessent d'être exacts. Considérons, par exemple, une équation $z - g(u) = 0$, $g$ étant une fonction multiforme qui n'admet dans le plan des $u$ qu'une suite ponctuelle de points singuliers $a_0, \ldots a_m, \ldots$. Quand $z$ tend vers un point singulier $\zeta$, d'une racine $u(z)$, $u$ tend vers une des valeurs $a_m$, *ou est indéterminée.* Mais, dans ce dernier cas, on ne peut trouver $p$ déterminations de $g(u)$, telles que, pour des valeurs voisines de $\zeta$, $u$ satisfasse à la relation $F(z, u) = (z - g_1)(z - g_2) \ldots (z - g_p) = 0$. Sinon, en raisonnant sur l'équation $F = 0$, on verrait que $u$ tend vers une limite quand $z$ tend vers $\zeta$. Il faut donc qu'on puisse former avec des valeurs de $g(u)$ une suite $\zeta - g_1(u), \zeta - g_2(u), \ldots, \zeta - g_q(u), \ldots$, telle que $|\zeta - g_q(u)|$ tende vers 0 avec $\frac{1}{q}$, quand $u$ décrit un chemin fini dans le plan, et, par suite, quel que soit $u$. Une racine $u(z)$ ne saurait donc présenter une coupure L

(dans le voisinage de laquelle elle ne prend que $n$ valeurs), à moins que la condition précédente ne soit remplie pour tous les points $\zeta$ de L, ce qui exige que les valeurs $z$ de $g(u)$, pour tout point $u$, *forment une suite linéaire ayant* L *pour limite*. Un exemple de ce fait est offert par la fonction modulaire $z = \omega(u)$. La fonction inverse $u = \varphi^8(\omega)$ est uniforme et présente l'axe des valeurs réelles pour coupure : les valeurs de $\omega$ qui correspondent à un point $u$ forment une suite linéaire, ayant cet axe pour limite.

La même méthode va nous permettre de démontrer un théorème utile dans la théorie des équations différentielles du premier ordre.

5. *Théorème sur les fonctions définies par une équation différentielle.* — Soit $\frac{du}{dz} = f(z, u)$ une équation différentielle du premier ordre, où $f(z, u)$ est une fonction uniforme de $z$ et $u$ quand $z$ varie dans une aire S et $u$ dans le plan des $u$. Nous rappellerons d'abord quelques propriétés connues de l'intégrale d'une telle équation.

Si une intégrale $u(z)$ tend vers $u_0$ quand $z$ tend vers $z_0$, $f(z_0, u_0)$ étant holomorphe, cette intégrale est elle-même holomorphe dans le voisinage de $z_0$, et développable par suite en série de Taylor dont on sait calculer les coefficients. Il n'existe pas d'autre intégrale prenant au point $z_0$ la valeur $u_0$, c'est-à-dire tendant vers $u_0$ quand $z$ tend vers $z_0$ sur un chemin de longueur finie.

Si la valeur de $f(z_0, u_0)$ est infinie, il existe toujours une dérivée de $\frac{1}{f}$ par rapport à $u$ d'un certain ordre $\left[\frac{\partial^p\left(\frac{1}{f}\right)}{\partial u^p}\text{ par exemple}\right]$, qui ne s'annule pas pour $(z_0, u_0)$, et le point $z_0$ est un point critique algébrique de $u(z)$ autour duquel se permutent $p+1$ valeurs.

Quand, $z$ tendant vers $z_0$, $u$ tend vers l'infini, on pose $u = \frac{1}{u_1}$, et la fonction $u_1$ vérifie l'équation

$$\frac{du_1}{dz} = -u_1^2 f\left(z, \frac{1}{u_1}\right) = f_1(z, u_1).$$

Si $f_1(z_0, 0)$ est holomorphe, $z_0$ est un pôle de $u(z)$; si $f_1(z_0, 0)$ est infinie, $z_0$ est à la fois un pôle et un point critique algébrique de l'intégrale.

Ce qui précède s'étend au cas où le point $z_0$ est le point $\infty$ du plan des $z$;

on pose alors $z = \frac{1}{z_1}$; l'intégrale $u\left(\frac{1}{z_1}\right)$ vérifie l'équation

$$\frac{du}{dz_1} = -\frac{1}{z_1^2} f\left(\frac{1}{z_1}, u\right) = f_1(z_1, u),$$

et l'on étudie cette équation dans le voisinage de $z_1 = 0$.

Ajoutons que la valeur de $f(z_0, u_0)$ peut être indéterminée, soit parce que $u_0$ est un point essentiel de la fonction $f(z_0, u)$, soit parce que $f(z, u)$ est de la forme $\frac{P}{Q}$ et que $P(z_0, u_0) = Q(z_0, u_0) = 0$. Enfin, $f(z_0, u)$ est parfois infinie ou indéterminée, quel que soit $u$; dans ce cas, l'intégrale $u(z)$ peut elle-même être indéterminée quand $z$ tend vers $z_0$.

Nous supposerons que, pour tout point $z_0$ de l'aire simple S, la fonction $f(z_0, u)$ n'admette dans le plan des $u$ qu'une *suite ponctuelle* de points essentiels (ou d'indéterminations) dont les affixes $a_1, \ldots, a_m, \ldots$ dépendent analytiquement de $z_0$, ainsi qu'il a été expliqué dans l'énoncé du théorème III (les points $a_m$ comprennent le point $\infty$, si $f_1(z_0, 0)$ n'est ni holomorphe, ni infinie). Les pôles de $f(z_0, u)$, $b_1$, $b_2$, $b_m, \ldots$, ne forment eux-mêmes, en conséquence, qu'une suite ponctuelle [il n'existe pas dans S de points $z_0$ pour lesquels $f(z_0, u)$ est infinie ou indéterminée quel que soit $u$].

Dans ces conditions, soit $u_0$ la valeur d'une intégrale au point $z_0$, $f(z_0, u_0)$ étant holomorphe. Si $z$, partant de $z_0$, décrit un chemin $\lambda$ de longueur finie, on peut prolonger $u(z)$ le long de $\lambda$ à l'aide de la série de Taylor, à moins qu'on ne rencontre un point $\zeta$ qui soit un point singulier de $u(z)$. Si ce point n'est ni un pôle, ni un point critique algébrique de $u(z)$, je dis que $u(z)$ *tend nécessairement vers un des points* $a_1(\zeta), \ldots, a_m(\zeta), \ldots$ *quand* $z$ *tend vers* $\zeta$.

Tout d'abord, l'intégrale $u(z)$ ne peut tendre vers une valeur $u'$ distincte des valeurs $a_m(\zeta)$; car, $f(\zeta, u')$ étant déterminée ou infinie, $\zeta$ serait un point ordinaire ou algébrique de $u(z)$; de même, $u$ ne peut tendre vers l'infini [si le point $\infty$ n'est pas un des points $a_m(\zeta)$], car $f_1(\zeta, 0)$ étant déterminée ou infinie, $\zeta$ est un pôle ou un point critique algébrique de $u(z)$. D'autre part, l'intégrale peut-elle être indéterminée? Il existe alors un nombre R tel que $|u(z)|$ soit inférieur à R pour des points $z$ de $\lambda$ compris entre $z'$ et $\zeta$, si voisin que $z'$ soit de $\zeta$, et un nombre $2\rho$ tel que pour des points $z$ et $z_1$, compris entre $z'$ et $\zeta$, on ait $|u(z_1) - u(z)| > 2\rho$. Traçons dans le plan des $u$ un cercle C ayant l'origine pour centre et de rayon R, et un cercle C' concentrique à C, et

de rayon R' supérieur à R; $R' = R + h$. A l'intérieur de C' les points singuliers $a_m, b_m$ de $f(\zeta, u)$ ne forment qu'une suite ponctuelle. Nous admettons qu'aucun de ces points ne se trouve sur C ou C' (sinon on augmenterait un peu R ou R'). On peut donc enfermer les points $a_m$, $b_m$ dans $p$ cercles $c$, dont les centres sont certains de ces points $(a'_1, \ldots, a_p)$, de rayon $r$ inférieur à $\frac{\rho}{4}$, et tels que, les $p$ cercles $c'$ concentriques et de rayon double $2r$, n'aient entre eux ou avec C et C' aucun point commun. La distance minima de deux points situés respectivement sur les circonférences de deux cercles $c'$, C ou C' est donc un nombre fini $k$. Désignons par $k'$ la plus grande des quantités $\frac{k}{8}$ et $\frac{\rho}{8}$. Pour des points $z$ voisins de $\zeta$, les points $a_m$, $b_m$ sont compris dans $p$ cercles de centres $a'_1(z), \ldots, a'_p(z)$ et de rayon $r'$, $r'$ différant peu de $r$. Traçons dans le plan des $z$ un cercle $\gamma$ de centre $\zeta$ et de rayon $\delta$ assez petit pour que $|a'_i(z) - a'_i(\zeta)|$ et $|r' - r|$ soient inférieurs à $k'$ quand $z$ varie dans $\gamma$. On voit qu'alors les points $a_m$, $b_m$ restent compris dans $p$ cercles $c_1$ de rayon $\rho'$ inférieur à $\frac{\rho}{2}$ et tels que les $p$ cercles concentriques $c'_1$, de rayon double, n'aient pas de points communs entre eux, ni avec C et C'. Ceci posé, appelons $S_1$ l'espace de C' extérieur aux cercles $c_1$, $S_2$ l'espace de C extérieur aux cercles $c'_1$, M le module maximum de $f(z, u)$ quand $z$ varie dans $\gamma$ et $u$ dans $S_1$. Pour tout point $z_0$ compris dans un cercle $\gamma'$ concentrique à $\gamma$ et de rayon $\delta' = \frac{\delta}{2}$, et pour tout point $u_0$ de $S_2$, la fonction $f(z, u)$ est holomorphe et de module au plus égal à M quand $z$ varie dans un cercle de centre $z_0$ et de rayon $\delta'$, et $u$ dans un cercle de centre $u_0$ et de rayon $l$, $l$ désignant la plus petite des quantités $h$ et $\rho'$. On en conclut que toute intégrale, égale à $u_0$ au point $z_0$, est holomorphe dans un cercle de centre $z_0$ et de rayon $d = \frac{\delta}{2}\left(1 - e^{-\frac{l}{M\delta}}\right)$.

Mais, si voisin que $z'$ soit de $\zeta$, $z$ décrivant $\lambda$ entre $z'$ et $\zeta$, $u(z)$ qui varie avec $z$ d'une manière continue n'est ni constamment extérieur à C, ni constamment intérieur aux cercles $c'_1$; donc, pour des valeurs de $z_0$ telles que $|z_0 - \zeta|$ soit inférieur à $d$, $u$ coïncide avec des points $u_0$ de $S_2$; mais il n'existe qu'une intégrale égale à $u_0$ au point $z_0$, et cette intégrale est holomorphe dans un cercle de centre $z_0$ et de rayon $d$, par suite au point $\zeta$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous pouvons dès lors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit une équation différentielle du premier ordre, $\frac{du}{dz} = f(z, u)$, dont le coefficient $f(z, u)$ est uniforme quand $z$ varie dans S et $u$ dans le plan des $u$. Si, pour tout point $z_0$ de S, les points d'indétermination de $f(z_0, u)$ ne forment dans le plan des $u$ qu'une suite ponctuelle (dont les affixes dépendent analytiquement de $z_0$, avec les restrictions indiquées), toute intégrale $u(z)$ uniforme (ou ne prenant que $n$ valeurs) dans une aire $\Sigma$ de contour $\sigma$, intérieure à S, est continuable au delà de $\sigma$ et ne présente dans $\Sigma$ que des pôles (ou des points critiques algébriques).*

La démonstration est identiquement la même que celle du théorème III. On voit que, si l'intégrale $u(z)$ présentait une ligne singulière, elle devrait coïncider avec une des fonctions $a_m(z)$, ce qui est impossible. Remarquons que, par la même raison, les points $z$, tels que $u(z)$ coïncide avec une des valeurs $a_m(z)$, ne peuvent former dans $\Sigma$, pour chaque intégrale $u(z)$, qu'une suite ponctuelle.

Quand les conditions précédentes sont remplies pour tous les points de S, sauf pour certains points $z_0$ [ces points sont des pôles ou des points essentiels de $f(z, u_0)$, quel que soit $u_0$], le théorème subsiste, à cela près, que les points $z_0$ peuvent être des points d'indétermination (points essentiels) de $u(z)$.

Le théorème subsiste également si la fonction $f(z, u)$ *admet p valeurs* $f_1, f_2, \ldots, f_p$ quand $z$ varie dans l'aire S et $u$ dans le plan. Autrement dit, $\frac{du}{dz}$ est racine d'une équation algébrique

$$F(u', u, z) = \varphi_p(z, u)u'^p + \varphi_{p-1}(z, u)u'^{p-1} + \ldots + \varphi_0(z, u) = 0,$$

les fonctions $\varphi_p, \ldots, \varphi_0$ vérifiant les mêmes conditions que la fonction $f(z, u)$ précédemment.

Pour chaque point $z_0$ de S, la fonction $f(z_0, u)$ admet des points d'indétermination $a_1, \ldots, a_m, \ldots,$ formant une suite ponctuelle, des pôles $b_1$, $b_2, \ldots, b_m, \ldots,$ et des points critiques $c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots$ formant également une suite ponctuelle dont $a_1, \ldots, a_m, \ldots$ sont des points limites. Les valeurs $c_1(z), \ldots, c_m(z), \ldots$ vérifient la relation obtenue en éliminant $u'$ entre $F = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$.

Rappelons qu'il n'existe en général qu'un nombre fini d'intégrales prenant au point $z_0$ la valeur $c_m(z_0)$ et que $z_0$ est un point critique algébrique de ces intégrales; il n'y a d'exception que si la quantité $\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial u} u'$ est nulle pour $z = z_0$, $u = c_m(z_0)$, $u' = f(z_0, c_m)$. Ceci n'a lieu d'ordinaire que pour des points particuliers $z'$ de S. Quand les trois relations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial u'} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial u} u' = 0$$

sont compatibles pour toute valeur de $z$, $z_0$ n'est encore en général qu'un point algébrique des intégrales égales à $c_m(z_0)$ pour $z = z_0$; il n'y a d'exception que pour des points particuliers $z'$ vérifiant une certaine relation distincte de $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$.

Ces remarques faites, on voit, comme plus haut, que (les points $z'$ exceptés), si un point $z_0$ est un point singulier non algébrique de l'intégrale $u(z)$, *u tend nécessairement vers une des valeurs* $a_m(z_0)$ quand $z$ tend vers $z_0$. Pour les points $z'$, $u$ peut tendre aussi vers une valeur $c_m(z')$. On tire de là les mêmes conclusions que plus haut : si $u(z)$ est uniforme, on ne prend que $n$ valeurs dans $\Sigma$, $u$ est continuable au delà de $\sigma$ et ne présente dans $\Sigma$ que des points singuliers algébriques.

Les seuls points où une intégrale $u(z)$ puisse être indéterminée sont, comme précédemment, les points $z_0$, pôles ou points d'indétermination de $f(z, u_0)$, quel que soit $u_0$. Il peut exister des points $z_1$ qui soient pour toute valeur de $u_0$ des points critiques (mais non de discontinuité) de $f(z, u_0)$; dans ce cas, $f(z, u_0)$ admet $z_1$ comme point critique algébrique d'ordre $p$ au plus; et $f(z, u_0)$ se met sous la forme

$$f(z, u_0) = A(u_0)(z - z_1)^{\frac{m}{p}} + B(u_0)(z - z_1)^{\frac{m'}{p}} + \ldots.$$

Si l'on pose $(z - z_1)^{\frac{1}{p}} = t$, on voit que l'équation

$$\frac{du}{dt} = p t^{p-1} f(z_1 + t^p, u)$$

ne présente plus pour $t = 0$ la même singularité; $u(t)$ ne pouvant être indéterminée pour $t = 0$, il en est de même de $u(z)$ pour $z = z_1$.

En particulier, supposons que le coefficient différentiel $f(z, u)$ soit uni-

forme ou ne prenne que $n$ valeurs quand $z$ et $u$ varient respectivement dans tout le plan. De plus, pour toute valeur $z_0$ de $z$, *sauf pour les points $z_1$ d'une suite ponctuelle*, les points d'indétermination de $f(z_0, u)$ ne forment dans le plan des $u$ qu'une *suite ponctuelle* dont les affixes dépendent *analytiquement* de $z_0$. Pour les points $z_1$, $f(z, u_0)$ est infinie ou indéterminée quel que soit $u_0$. $\Big[$Le point $\infty$ est un point $z_1$, si, pour $z'=0$, $\frac{1}{z'^2}f\left(\frac{1}{z'}, u_0\right)$ est discontinue, quel que soit $u_0$.$\Big]$ Nous convenons de dire, pour abréger, que *le coefficient $f(z, u)$ ne présente que des singularités ordinaires, quand les conditions précédentes sont vérifiées.* Dans les applications qui vont suivre, nous admettrons toujours (à moins d'indication contraire) que les fonctions $f(z, u)$ considérées rentrent dans cette catégorie.

Cette hypothèse faite, si une intégrale $u(z)$ est uniforme dans tout l'espace du plan où l'on peut la prolonger, elle ne saurait présenter de coupure et *par suite existe dans tout le plan. De plus, elle ne peut admettre d'autres points essentiels que les points $z_1$.*

De même, si une intégrale $u(z)$ ne prend que $n$ valeurs dans l'espace du plan où elle existe, elle existe dans tout le plan et *vérifie une équation algébrique*

$$u^n \varphi_n(z) + \ldots + \varphi_0(z),$$

*où les fonctions $\varphi_n(z), \ldots, \varphi_0(z)$ sont uniformes et ne présentent pas dans le plan des $z$ d'autres points essentiels que les points $z_1$* [ces points $z_1$ ne sont pas d'ailleurs nécessairement des points essentiels de $u(z)$].

Si les points $z_1$ n'existent pas $\Big[$c'est-à-dire si la fonction $f(z, u)$ n'est discontinue quel que soit $u$ pour aucun point $z_1$ du plan et s'il en est de même de la fonction $\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}, u\right)\Big]$, *toute intégrale uniforme de l'équation est nécessairement une fraction rationnelle de $z$; toute intégrale qui n'admet que $n$ valeurs est nécessairement une fonction algébrique de $z$.*

Nous allons donner quelques applications des résultats précédents.

6. *Applications du théorème précédent.* — En premier lieu, j'envisage l'équation

$$\frac{du}{dz} = \frac{P(z, u)}{Q(z, u)},$$

où P et Q sont deux polynômes en $z$ dont les coefficients sont des fonctions

uniformes de $u$ (ou admettent $p$ valeurs). Pour que la remarque précédente s'applique à cette équation, il faut et il suffit que *le dénominateur* Q *ne renferme aucun facteur de la forme* $z-a$, *a étant indépendant de* $u$, *et de plus que le degré en* $z$ *du dénominateur surpasse d'au moins deux unités le degré correspondant du numérateur*. Ces conditions remplies, toute intégrale de l'équation, qui ne prend que $n$ valeurs dans l'espace du plan où elle existe, est nécessairement *algébrique*.

Quand P et Q sont deux polynômes en $z$ et $u$, on peut trouver (ainsi que nous le montrerons dans un autre travail) toutes les fractions rationnelles qui vérifient l'équation différentielle. Si les conditions précédentes sont remplies, on est certain d'obtenir ainsi *toutes les intégrales uniformes*.

Au lieu de l'équation ($\alpha$)

$$\frac{du}{dz}=\frac{P(z,u)}{Q(z,u)},$$

on peut considérer une équation de la forme

$$F(u',u,z)=0,$$

où F est un polynôme en $u'$ et en $z$. *Si le coefficient* $\psi_p(z,u)$ *de la plus haute puissance* $u'^p$ *de* $u'$ *ne renferme aucun facteur de la forme* $(z-a)$ *(a étant indépendant de* $u$*), et si de plus le degré en* $z$ *de* $\psi_p(z,u)$ *surpasse d'au moins* $2(p-q)$ *unités le degré correspondant du coefficient de* $u'^q$, $\psi_q(z,u)$, toute intégrale qui ne prend que $n$ valeurs dans l'espace où elle existe est nécessairement une fonction algébrique de $z$. Mais je n'insiste pas davantage ici sur cette première application, qui nous entraînerait hors du sujet.

7. Comme seconde application, nous allons rechercher la forme de l'équation

$$(1)\qquad \frac{du}{dz}=f(z,u)$$

[où $f(z,u)$ est uniforme], quand l'intégrale générale de cette équation est elle-même uniforme.

Nous démontrerons d'abord que l'intégrale générale peut s'écrire dans ce cas

$$u=\frac{Af+\varphi}{Af_1+\varphi_1},$$

$f, f_1, \varphi_0, \varphi_1$ étant des fonctions uniformes de $z$, et A une constante.

Soit $u_0$ la valeur au point $z_0$ d'une intégrale $u(z)$ : désignons par C et C′ des cercles de rayon $\rho$ et $r$, décrits respectivement de $z_0$ et de $u_0$ comme centres, à l'intérieur et sur le contour desquels $f(z, u)$ est holomorphe et de module inférieur à M.

On sait que l'intégrale $u$ peut se développer ainsi :

$$u = u_0 + (z - z_0) u'(z_0, u_0) + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{1.2\ldots n} u_n + \ldots, \tag{2}$$

la série (2) convergeant pour toute valeur de $z$ intérieure à un cercle de centre $z_0$ et de rayon $\rho\left(1 - e^{\frac{-r}{2M\rho}}\right)$. Donnons à $u_0$ une valeur quelconque $v$, intérieure à un cercle $C'_1$ de centre $u_0$ et de rayon $\frac{r}{2}$. La fonction $f(z, u)$ est holomorphe quand $z$ varie dans C, et $u$ dans un cercle de centre $v$ et de rayon $\frac{r}{2}$, et son module est au plus égal à M. Par suite, la série (2)

$$u = v + (z - z_0) u'(v) + \ldots + \left(\frac{z - z_0}{1.2\ldots n}\right)^n u_n(v) + \ldots$$

converge pour toute valeur de $z$ telle que $|z - z_0|$ soit inférieur à $\rho\left(1 - e^{\frac{-r}{2M\rho}}\right)$ et pour toute valeur de $v$ telle que $|v - u_0|$ soit inférieur à $\frac{r}{2}$; elle converge en outre uniformément, comme il résulte aussitôt de la démonstration de Briot et Bouquet.

Les termes de la série étant des fonctions holomorphes de $v$ dans $C'_1$, pour toute valeur de $z$ intérieure à C, $u$ est fonction holomorphe de $v$ dans $C'_1$, d'après les théorèmes sur les séries établis dans le premier Chapitre.

Ceci posé, admettons que l'intégrale générale de l'équation (1) soit uniforme; une quelconque des intégrales particulières, $u(z)$, ne peut présenter dans le plan que des points singuliers $\zeta$, *formant une suite ponctuelle*. Ces points sont des pôles ou des points essentiels; dans ce dernier cas, ils appartiennent à l'ensemble ponctuel des points $z'$ pour lesquels $f(z, u)$ est discontinue, quel que soit $u$. De plus, les points $z_1$ du plan tels que la valeur $u(z_1)$ rende $f(u, z_1)$ discontinue ne forment également qu'une suite ponctuelle. Désignons par E l'ensemble de tous ces points singuliers [à chaque intégrale $u(z)$ correspond un ensemble E]. Soit enfin $v$ la valeur de l'intégrale $u(z)$ au point $z_0$; pour toute valeur $u_0$ de $v$, distincte des points $a_1(z_0), \ldots, a_m(z_0), \ldots$ [tels que $f(z_0, a_m)$ soit discontinue], l'intégrale

$u(z) = F(z, v)$ a une valeur unique et déterminée en chaque point du plan $z$, sauf aux points de l'ensemble E. Je dis que $u(z)$ est une fonction *analytique de $v$*; la chose vient d'être démontrée pour les points Z voisins de $z_0$. Prenons dans le plan des $z$ un point Z quelconque, qui ne coïncide avec aucun des points singuliers E de l'intégrale $u(z, u_0)$, et joignons $z_0 Z$ par un chemin L qui ne renferme également aucun des points E. Quand $z$ décrit L, $u(z) = F(z, u_0)$ décrit un chemin L'. Soit Z' un point de L. On peut trouver deux nombres $\rho$ et $r$, indépendants de la position de Z' sur L et tels qu'en décrivant deux cercles, le premier C de centre Z' et de rayon $\rho$, le second C' de centre $u(Z', u_0)$ et de rayon $r$, $f(z, u)$ soit holomorphe et ait un module inférieur à M, quand $z$ varie dans C et $u$ dans C' (en effet, pour chaque point Z', $r$ et $\rho$ existent; il suffit de prendre leurs valeurs minima quand Z' décrit L; ces minima existent, sinon $r$ ou $\rho$ tendrait vers zéro quand $z$ tend vers un point Z', mais en ce point Z', $r$ et $\rho$ ont une valeur différente de zéro, et l'on en conclut qu'il en est de même pour les points voisins). Il suffit de prouver que $F(Z, v)$ est fonction holomorphe de $v$ pour des valeurs de $v$ voisines de $u_0$; décrivons du point $z_0$ comme centre un cercle $C_0$ de rayon $R = \rho\left(1 - e^{\frac{-r}{2M\rho}}\right)$ et du point $u_0$ un cercle $C'_0$ de rayon $\frac{r}{2}$; si Z' est un point de L intérieur à $C_0$, la série

$$v' = F(Z', v) = v + (Z' - z_0)u'(v) + \ldots$$

est fonction holomorphe de $v$ dans le cercle $C'_0$; pour des valeurs $v$ voisines de $u_0$, $v'$ prend des valeurs voisines de $U' = F(Z', u_0)$; décrivons alors un cercle $C_1$ du point Z' comme centre avec R comme rayon, du point U' un cercle $C'_1$ de rayon $\frac{r}{2}$; et soit Z'' un point de L intérieur à $C_1$ et compris entre Z' et Z. La série

$$v'' = F(Z'', v) = v' + (Z'' - Z')u'_1(v') + \ldots$$

est fonction holomorphe de $v'$ dans $C'_1$, par suite fonction holomorphe de $v$ dans le voisinage de $u_0$. En raisonnant sur Z'' comme sur Z' et ainsi de suite, on arrive à un cercle C renfermant Z, et l'on voit que $V = F(Z, v)$ est fonction holomorphe de $v$ dans le voisinage de $u_0$; la proposition est établie.

La fonction $u = F(z, v)$ est donc une fonction *analytique* des deux variables $z$ et $v$. Si l'on excepte les valeurs $z'$ pour lesquelles $f(z, u)$ est dis-

continue, quel que soit $u$, $F(z, v)$ est pour tout système $z$ et $v$ déterminée ou infinie. Si, pour une valeur $z_1$, $F(z_1, v)$ est infinie en des points $v$ formant une coupure, F est infinie dans tout le plan $v$; ceci ne peut avoir lieu que pour les points $Z_1$ d'une suite ponctuelle, sinon $F(z, v_0)$ serait infinie en tous les points $Z_1$ d'une suite linéaire, par suite dans tout le plan Z, quel que fût $v_0$. En conséquence, la fonction $u(z, v)$ pour toute valeur de $z$ (sauf pour les points d'une suite ponctuelle) est *définie dans le plan des $v$ et n'y présente que des pôles.*

Le raisonnement précédent démontre en toute rigueur que la fonction $F(z, v)$, où l'on donne à $v$ une valeur quelconque différant des valeurs $a_1(z_0), \ldots, a_m(z_0), \ldots$, vérifie l'équation différentielle (1). A deux valeurs de $v$ correspondent deux intégrales distinctes, puisqu'elles sont uniformes et prennent au point $z_0$ deux valeurs $v$ différentes. On sait d'ailleurs qu'en un point Z du plan $z$ il n'existe qu'une intégrale $u(z)$ prenant la valeur U, si $f(Z, U)$ est holomorphe. Posons donc

$$U = F(Z, v),$$

U étant une valeur quelconque, distincte des valeurs

$$F[Z, a_1(z_0)], \quad \ldots, \quad F[Z, a_m(z_0)], \quad \ldots$$

et telle que $F(Z, U)$ soit holomorphe. Cette équation en $v$ ne peut avoir plus d'une racine, car si elle en avait deux, $v_0$ et $v_1$, les deux intégrales $F(z, v_0)$, $F(z_1, v_1)$ seraient distinctes et prendraient au point Z la même valeur U, ce qui est impossible. Il en résulte que la fonction $F(Z, v)$ est de la forme $\frac{Av + B}{Cv + D}$, A, B, C, D dépendant de Z, et, comme ceci a lieu quel que soit Z, l'équation (1) est vérifiée par une fonction $u(z) = \frac{vA(z) + B(z)}{vC(z) + D(z)}$, où l'on donne à $v$ une valeur constante (A, B, C, D étant des fonctions uniformes de $z$ qui ne présentent dans le plan que des points essentiels). Toute intégrale $u_1(z)$ de l'équation est donnée par $u(z)$; car on peut choisir des points Z qui soient des points ordinaires de A, B, C, D, et pour lesquels $u_1$ prenne une valeur U, $f(Z, U)$ étant holomorphe; si l'on donne à $v$ la valeur $v_0 = \frac{B(z) - UD(Z)}{UC(CZ) - A(Z)}$, la fonction $u(z, v_0)$, égale à $u_1$ au point Z, coïncide avec $u_1(z)$; $v_0$ peut être infini, mais $v_0$ ne peut être indéterminé quel que soit Z; sinon on aurait $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$ identiquement, et $u = \frac{A}{C}$; $u$ serait indé-

pendant de $v$, ce qui est impossible, puisque $u(z_0) = v$. *L'intégrale générale de l'équation* (1) *peut donc s'écrire*

$$(3)\qquad u(z) = \frac{vA(z) + B(z)}{vC(z) + D(z)}$$

ou encore

$$(4)\qquad v = \frac{-uD(z) + B(z)}{uC(z) - A(z)}.$$

On en conclut immédiatement que l'équation (1), qui s'obtient en dérivant l'équation (4) par rapport à $z$, est de la forme

$$(5)\qquad \frac{du}{dz} = au^2 + bu + c,$$

$a$, $b$, $c$ étant des fonctions uniformes de $z$. Ainsi, *toute équation dont le coefficient différentiel est uniforme dans le plan des $z$ et des $u$, et dont l'intégrale générale est également uniforme, est une équation de Riccati.*

L'intégrale générale peut alors se mettre sous la forme (3); cette relation (3) exprime que le rapport anharmonique de quatre intégrales est constant. On sait que cette propriété appartient à toute équation de Riccati (alors même que son intégrale n'est pas uniforme).

Parmi les équations de la forme $\frac{du}{dz} = \frac{P(z, u)}{Q(z, u)}$ où P et Q sont des polynômes en $u$, il était clair que l'équation de Riccati pouvait seule admettre une intégrale générale uniforme; car $u$ ne peut figurer au dénominateur [sinon en un point $z_0$ une intégrale prend la valeur $u_0$ qui annule $Q(z_0, u)$ et admet $z_0$ comme point critique], et, de plus, la même condition doit être remplie pour l'équation transformée en $\frac{1}{u}$, ce qui exige que P soit du second degré en $u$.

*Si l'intégrale générale de l'équation* (1) *est une fonction entière, elle est de la forme*

$$u = vA(z) + B(z),$$

A et B étant holomorphes. En effet, quand le dénominateur de $u$ dans l'expression (3) dépend de $v$, pour une valeur $z_1$ de $z$, on peut donner à $v$ la valeur $v_1 = \frac{D(z_1)}{C(z_1)}$, et la fonction $u(z, v_1)$ est infinie au point $z_1$, à moins que

l'on n'ait, pour toute valeur de $z_1$, $-\frac{D(z_1)}{C(z_1)} = -\frac{B(z_1)}{A(z_1)}$, ce qui est impossible. Il en résulte que l'équation (1) est, dans ce cas, *nécessairement linéaire :*

$$\frac{du}{dz} = au + b.$$

Il est facile alors de reconnaître si l'intégrale est uniforme : il faut notamment que $a(z)$ soit la dérivée logarithmique d'une fonction uniforme.

Si l'intégrale de l'équation (1) est une fraction rationnelle, cette équation est une équation de Riccati dont les coefficients $a$, $b$, $c$ sont eux-mêmes des fractions rationnelles. Supposons que ni $a$, ni $c$ ne soient identiquement nuls (au cas contraire, on ramène l'équation à être linéaire). Nous allons chercher à quelles conditions l'intégrale est effectivement une fraction rationnelle. Remarquons que, si l'on sait d'avance que ces conditions sont remplies, *on obtient l'intégrale générale par des opérations purement algébriques.* Désignons en effet par $A_n$, $B_n$, $C_n$, $D_n$ des polynômes en $z$ de degré $n$, à coefficients indéterminés; pour une certaine valeur de $n$, on peut déterminer ces coefficients, en sorte que toute fonction $u(z) = \frac{A_n v + B_n}{C_n v + D_n}$ vérifie l'équation différentielle; si l'on ajoute de plus la condition que, pour $z = z_0$, on ait, quel que soit $v$, $v = \frac{A_n(z_0)\,v + B_n(z_0)}{C_n(z_0)\,v + D_n(z_0)}$, cette détermination n'est possible que d'une seule manière. On fait donc $n$ égal successivement à 1, 2, 3, ..., et l'on finit par obtenir un système d'équations algébriques compatibles, et n'admettant qu'un système de solutions, qui dépendent par suite d'opérations purement algébriques. On peut encore exprimer que la fonction $u = \frac{A_n}{B_n}$ vérifie l'équation; le système de relations auxquelles on est conduit est indéterminé pour une certaine valeur de $n$; on peut y ajouter la condition $v = \frac{A_n(z_0)}{B_n(z_0)}$, et les coefficients de $A_n$, $B_n$ dépendent linéairement de $v$.

Tout revient donc à trouver les conditions pour que l'intégrale de l'équation soit algébrique et rationnelle. Ramenons d'abord $\left(\text{en posant } u_1 = u + \frac{b}{2a}\right)$ l'équation à la forme

$$(7) \qquad \frac{du}{dz} = au^2 + c,$$

ou encore

$$\frac{du}{dz} = \frac{\alpha u^2 + \gamma}{\beta},$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant des polynômes qui n'admettent pas un facteur commun.

Les seules valeurs de $z$ pour lesquelles une intégrale puisse être indéterminée sont les racines $\zeta$ du polynôme $\beta$, et la valeur $z = \infty$, si le degré de $\beta$ ne dépasse pas d'au moins deux unités les degrés de $\alpha$ et $\gamma$. Ces points sont aussi les seuls points critiques possibles des intégrales, car, pour tout autre point $z_0$, une intégrale $u$ prend une valeur finie $u_0$ ou devient infinie : dans le premier cas, $u$ est holomorphe dans le domaine de $z_0$, dans le second cas $\frac{1}{u}$ est holomorphe. Pour que l'intégrale soit une fraction rationnelle, il faut donc et il suffit que les points $\zeta$ ne soient, pour aucune des intégrales, des points de ramification ou d'indétermination. On peut ramener l'équation de Riccati à une équation linéaire et appliquer les conditions données par M. Fuchs pour que les points singuliers possibles des intégrales soient algébriques; on peut aussi faire la discussion de la manière suivante, en s'appuyant sur les résultats de MM. Briot et Bouquet.

Soit $z_0$ un des points $\zeta$, $z_0$ est le pôle au moins d'une des deux fonctions $a$ et $c$; en premier lieu, si $z_0$ est un pôle d'ordre $m$ de $a(z)$, *c'est un zéro au moins d'ordre* $(m-1)$ *de* $u(z)$; car, si l'on pose $u = u_1 + \frac{1}{v}$ ($u$ étant une intégrale quelconque), la fonction $v$ vérifie l'équation $-\frac{dv}{dz} = 2au_1 v + a$, et l'intégrale de cette équation étant par hypothèse une fraction rationnelle, le produit $2au_1$ doit être la dérivée logarithmique d'une fraction rationnelle, et ne peut admettre par suite que des pôles du premier degré. Mais $z_0$ est un pôle d'ordre $m$ de $a(z)$ : donc $u_1$ doit contenir en facteur $(z-z_0)^{m-1}$. Faisons pour abréger l'écriture $z_0 = 0$, et posons

$$a(z)z^m = A(z), \qquad u(z) = z^{m-1}v(z)$$

[$A(z)$ et $v(z)$ sont holomorphes pour $z = 0$, et $A$ ne s'annule pas avec $z$]. La fonction $v$ vérifie l'équation

$$\frac{dv}{dz} = \frac{A(z)z^{2(m-1)} - (m-1)z^{2(m-1)}v + c(z)z^m}{z^{2m-1}}.$$

Pour $z = 0$, $v$ a par hypothèse une valeur finie, ainsi que sa dérivée, ce qui

exige que $c(z)$ contienne le facteur $z$ au moins à la puissance $(m-2)$. Ainsi tout pôle d'ordre $m$ de $a(z)$ est zéro au moins d'ordre $(m-2)$ de $c(z)$. Si l'on pose $C(z) = \frac{c(z)}{z^{m-2}}$, l'équation précédente devient

$$\frac{dv}{dz} = \frac{A(z)v^2 - (m-1)v + C(z)}{z}.$$

De même, tout pôle d'ordre $m'$ de $c(z)$ est pôle d'ordre $(m'-1)$ au moins de toute intégrale et zéro d'ordre $(m'-2)$ de $a(z)$.

Cette remarque faite, considérons d'abord un pôle simple $z_0$ de $A(z)$: $z_0$ ne saurait être un pôle de $c(z)$ d'ordre plus grand que 1, sinon, d'après ce qui précède, $a(z_0)$ serait fini. Posons encore, en faisant $z = 0$,

$$A(z) = az, \qquad C(z) = cz,$$

A et C sont holomorphes pour $z = 0$, et A ne s'annule pas avec $z$. L'équation peut s'écrire

$$\frac{du}{dz} = \frac{u^2[A(0) + zA'(0) + \ldots] + C(0) + zC'(0) + \ldots}{z}.$$

Si, quand $z$ tend vers zéro, $u$ tend vers une valeur $u_0$, le système $z = 0$, $u = u_0$, annule nécessairement le numérateur du second membre $\Big(u_0$ ne peut être infinie, car, dans l'équation transformée en $\frac{1}{u} = v$, le coefficient différentiel est infini pour $z = 0$, $v = 0$, puisque $A_0$ n'est pas nul$\Big)$. Toutes les intégrales doivent donc tendre vers une des valeurs $\pm\sqrt{\frac{-C_0}{A_0}}$ quand $z$ tend vers 0 et être holomorphes dans le voisinage de ce point. Désignons par $+u_0 = +\sqrt{\frac{-C_0}{A_0}}$ celle des deux valeurs du radical dont le produit par $A_0$ a sa partie réelle positive. Si $u$ tend vers $-u_0$, on pose

$$u = -\sqrt{\frac{C_0}{A_0}} + v;$$

la fonction $v$ s'annule pour $z = 0$ et vérifie l'équation

$$v' = \frac{-2A_0u_0v + z\left(C'_0 - \frac{A'_0C_0}{A_0}\right) + \ldots}{z}.$$

La partie réelle du coefficient de $v$ étant négative, l'équation n'admet qu'une seule intégrale $v_1(z)$ s'annulant avec $z$, et cette intégrale est holomorphe pour $z = 0$. Toutes les intégrales $u(z)$, sauf l'intégrale

$$u_1 = -u_0 + v_1(z),$$

doivent donc prendre la valeur $u_0$ pour $z = 0$. Posons $u = +\sqrt{\frac{-C_0}{A_0}} + v$. Toutes les intégrales (sauf une) de l'équation

$$v' = \frac{2A_0 u_0 v + z\left(C_0'' - \frac{A_0' C_0}{A_0}\right) + \dots}{z} = \frac{\lambda v + \mu z + \dots}{z}$$

doivent s'annuler et être holomorphes pour $z = 0$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut d'abord, d'après un théorème de MM. Briot et Bouquet, que *le coefficient de $v$, $+2\sqrt{-A_0 C_0}$, soit un entier positif $n$*; de plus, si $n = 1$, le coefficient de $z$, $\mu = C_0'' - \frac{A_0' C_0}{A_0}$, *doit être nul;* sinon on diminue le coefficient de $v$ de $(n-1)$ unités, en posant

$$v = (v_1 z + v_2 z^2 + \dots + v_{n-1} z^{n-1}) + z^{n-1} w,$$

$v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ représentant les valeurs pour $z = 0$ des $(n-1)$ premières dérivées de $v(z)$, valeurs qui se calculent en différentiant l'équation

$$z v' - \lambda v + \mu z + \dots = 0, \qquad \left(v_1 = \frac{-\mu}{\lambda - 1}, \quad \dots\right).$$

L'équation se ramène ainsi à la forme

$$w' = \frac{w + \lambda' z + \dots}{z}.$$

*Il faut que $\lambda'$ soit nul.* Quand ces conditions sont remplies, si l'on pose $w = tz$, l'équation devient

$$\frac{dt}{dz} = t^2 M(z) + t N(z) + P(z), \tag{8}$$

M, N, P étant holomorphes pour $z = 0$. On voit sans peine que, dans le cas actuel, la condition $\lambda' = 0$ exprime que $D_z^n[A(z) u_n^2(z) + C(z)]$ s'annule pour $z = 0$, $u_n(z)$ désignant le polynôme $(u_0 + v_1 z + v_2 z^2 + \dots + v_{n-1} z^{n-1})$.

Quand les deux conditions précédentes sont remplies, l'équation (7) se ramène à la forme (8) par la transformation $u = u_n + tz^n$. Pour $z = 0$, aucune intégrale $t(z)$ de l'équation (8) ne peut être indéterminée; si une intégrale $t(z)$ tend vers $t_0$, elle est holomorphe pour $z = 0$, ainsi que la fonction $u$ correspondante; si $t(z)$ tend vers l'infini quand $z$ s'annule, on pose $t = \frac{1}{\theta}$, et l'on voit que l'équation en $\theta$ admet une intégrale et une seule s'annulant avec $z$ : cette intégrale correspond à la fonction $u_1$ qui prend la valeur $-u_0$ pour $z = 0$. Les conditions énoncées sont donc *nécessaires et suffisantes* pour que $z = 0$ soit un point ordinaire de $u(z)$.

Le raisonnement suppose $C_0$ différent de 0; mais, si $C_0 = 0$, l'équation (7) est de la forme $\frac{du}{dz} = \frac{\mu z + cu^2 + \dots}{z}$. Le coefficient de $u$ étant nul dans le second membre, l'équation ne peut admettre qu'une intégrale holomorphe ou algébrique au point $z = 0$. Ceci revient à dire que tout pôle simple de $a(z)$ est pôle simple de $c(z)$, et réciproquement.

Il importe de remarquer que les deux conditions trouvées peuvent se vérifier par des opérations *purement algébriques*, alors même qu'on ne connaît pas les racines de $\beta(z) = 0$. Soient $\beta_1 = 0$ l'équation qui donne les racines simples de $\beta(z)$, $z_0$ une de ces racines; on doit avoir d'abord $4C_0A_0 = -n^2$ ($n$ étant un nombre entier); $A(z)$ désigne $(z - z_0) \times a(z)$ ou $\frac{(z-z_0)\alpha}{\beta}$ et $C(z)$ désigne $\frac{(z-z_0)\gamma(z)}{\beta}$; par suite,

$$A_0 = \frac{\alpha(z_0)}{\beta'(z_0)}, \qquad C_0 = \frac{\gamma(z_0)}{\beta'(z_0)}.$$

Posons

$$(9) \qquad \zeta = \frac{-4\alpha(z)\gamma(z)}{\beta'^2(z)}.$$

La transformée en $\zeta$ de l'équation $\beta_1 = 0$ doit n'avoir comme racines que des nombres entiers carrés parfaits, ce qu'on reconnaît par des opérations linéaires qui donnent ces racines. Soit $n^2$ l'une d'elles. Pour $\zeta = n^2$, les polynômes $\beta_1(z)$ et $n^2\beta'^2(z) + 4\alpha(z)\gamma(z)$ ont un plus grand commun diviseur dont les racines doivent vérifier la condition

$$D_z^n[u_0^2(z_0)A(z_0) + C(z_0)] = 0.$$

Les valeurs pour $z = z_0$ des dérivées successives de A et de C s'expriment

linéairement en fonction des coefficients de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, comme le montrent aussitôt les identités

$$A(z_0)+A'(z_0)(z-z_0)+\ldots=\frac{\alpha_0+\alpha'_0(z-z_0)+\ldots}{\beta'_0+\frac{\beta''_0(z-z_0)}{1.2}+\ldots},$$

et

$$C(z_0)+C'(z_0)(z-z_0)+\ldots=\frac{\gamma_0+\gamma'_0(z-z_0)+\ldots}{\beta'_0+\frac{\beta''_0(z-z_0)}{1.2}+\ldots}.$$

De plus, les coefficients de $u_n$ s'expriment linéairement en fonction de $A_0$, $A'_0$, $A''_0$, ..., $C_0$, $C'_0$, ... *quand la première condition est satisfaite*

$$u_0=\frac{n}{A_0},$$

$$v_1=u'_0=\frac{C'_0-\frac{A'_0C_0}{A_0}}{n-1}=\frac{1}{(n-1)\beta'_0}\left(\gamma'_0-\frac{\alpha'_0\gamma_0}{\alpha_0}\right),$$

et ainsi de suite. La seconde condition s'écrit donc $H(z_0)=0$, $H$ étant un polynôme dont les coefficients se calculent linéairement à l'aide des coefficients de $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$. Il faut que $H(z)$ soit divisible par $\beta_2(z)$, ce qui se vérifie encore par des opérations purement algébriques.

Passons au cas où le point $z_0$ est un pôle d'ordre $m$ de $a(z)$. Nous avons dit que $z_0$ est alors zéro au moins d'ordre $(m-1)$ de $u(z)$, et que par la transformation $u=vz^{m-1}$ (nous faisons $z_0=0$), l'équation (7) devient

$$v'=\frac{Av^2-(m-1)v+C(z)}{z},$$

$A$ et $C$ étant holomorphes pour $z=0$, et $A$ ne s'annulant pas avec $z$.

En raisonnant comme plus haut, on voit que $v$ doit prendre pour $z=0$ une des valeurs $v_0$, $v'_0$ de l'expression $U=\frac{m-1\pm+\sqrt{(m-1)^2-4Az_0}}{2A_0}$; si l'on pose $v=U+w$, l'équation devient

$$w'=\frac{w\left[\pm\sqrt{(m-1)^2-4A_0C_0}+\mu z+\ldots\right]}{z}=\frac{\lambda w+\mu z}{z}.$$

La discussion précédente montre que $\sqrt{(m-1)^2-4A_0C_0}$ doit être un entier positif $n$, et que de plus la dérivée $n^{ième}$ de $[Av_n^2+C(z)]$ doit être nulle pour $z=0$, $v_n$ désignant le polynôme $v_0+v_1z+\ldots+v_{n-1}z^{n-1}$, où

$v_0 = \frac{(m-1)+n}{2A_0}$, et où $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ sont les valeurs de $w', w'', \ldots$ calculées, pour $z = 0$, $w = 0$, en différentiant l'équation

$$zw' = \lambda w + \mu z + \ldots.$$

Quand ces conditions sont satisfaites, toutes les intégrales sont holomorphes pour $z = 0$ et prennent en ce point la valeur $v_0$, sauf une seule qui prend la valeur $v'_0$.

On obtient des conditions analogues pour les pôles d'ordre $m'$ de $C(z)$ en raisonnant sur la transformée en $\frac{1}{u}$. Ces conditions se vérifient par des opérations linéaires, alors même qu'on ne sait pas résoudre l'équation qui donne les racines d'ordre $m$ de $\beta(z)$. Enfin, si le point $z = \infty$ est un point singulier, on rentre dans les cas précédents à l'aide de la transformation $z_1 = \frac{1}{z}$.

Nous voyons qu'en somme on peut reconnaître, *par des opérations purement algébriques, si l'intégrale de l'équation de Riccati est une fraction rationnelle, et dans ce cas l'intégrale s'obtient elle-même par des opérations linéaires.*

Si les deux conditions précédentes sont satisfaites pour tous les points $\zeta$, sauf pour un seul point $z_0$ (le point $\infty$, par exemple), l'intégrale de l'équation est uniforme, et le point $z_0$ est nécessairement un point essentiel de l'intégrale. Plus généralement, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale soit une fonction uniforme n'ayant dans le plan qu'un point essentiel sont les suivantes : les coefficients $a$, $b$, $c$ ont au plus un point essentiel (qui leur est commun), le point $\infty$ par exemple, et les deux conditions énoncées sont satisfaites pour tous les pôles $\zeta$ du coefficient différentiel. Si les fonctions $a$, $b$, $c$ sont algébriques, ces conditions doivent être satisfaites pour tous les points $\zeta$, sauf pour un seul.

En particulier, si le coefficient différentiel est une fonction périodique de $z$, il suffit de vérifier les conditions pour les points $z$ situés dans la bande du plan comprise entre deux droites, perpendiculaires au segment qui représente la période et passant par ses extrémités. De même, si le coefficient est doublement périodique, il suffit de vérifier les conditions dans le parallélogramme des périodes. On peut chercher aussi à quelles conditions l'intégrale est elle-même périodique : on voit qu'alors le coefficient doit être une

fonction de $e^{kz}$; il suffit de poser $e^{kz} = t$, et de chercher si l'intégrale est fonction uniforme de $t$.

Ce qui précède permet de résoudre très facilement la question suivante : *Trouver les équations de la forme*

$$u = \mathrm{F}(z, u') \tag{1}$$

(*où* F *est uniforme en* $z$ *et en* $u'$), *dont l'intégrale générale est uniforme.*

Différentions cette équation par rapport à $z$; il vient

$$u' = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u'} u'' + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}$$

ou bien

$$u'' = \frac{u' - \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}}{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u'}}. \tag{2}$$

Si $u(z)$ est uniforme, il en est de même de $u'$, et inversement, si l'intégrale $u'$ de $(z)$ est uniforme, l'intégrale $u(z)$ de l'équation proposée est uniforme, puisque $u = \mathrm{F}(z, u')$ ([1]). Il suffit donc d'étudier l'équation (2) dont l'intégrale générale doit être de la forme $u' = \dfrac{\mathrm{A}c + \mathrm{B}}{\mathrm{C}c + \mathrm{D}}$. Je dis que $c$ ne saurait figurer au dénominateur; autrement, on pourrait écrire $u' = \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\left(\dfrac{c + \mathrm{B}_1}{c + \mathrm{D}_1}\right)$, $\mathrm{B}_1$ différant de $\mathrm{D}_1$ et $\mathrm{D}_1$ n'étant pas une constante. Soit $z_0$ un point quelconque, pour lequel aucune des fonctions C, $\mathrm{B} - \mathrm{D}_1$, $\mathrm{D}'_1$ ne s'annule. Si

$$c_0 = -\mathrm{D}_1(z_0).$$

---

([1]) Cette remarque est générale : soit $f(u', u, z) = 0$ une équation où $f$ est un polynôme en $u$ et une fonction uniforme de $u'$ et de $z$. Différentions-la par rapport à $z$, et éliminons $u$ entre $f = 0$ et $\dfrac{df}{dz} = 0$. On obtient une équation $f_1(u'', u', z) = 0$, de même degré en $u''$ que $f$ en $u$. Si l'intégrale de cette équation est uniforme, il en est de même de l'intégrale de $f = 0$; car $u = \int u'\,dz + c$, et ne peut présenter que des points critiques logarithmiques, ce qui est impossible, puisque $u$ dépend algébriquement de fonctions uniformes de $u'$ et de $z$. Si $u'$ admet $p$ valeurs, $u$ admet également $p$ valeurs. Il n'y a d'exception que si $f$ ne contient pas $u$. De là découlent plusieurs conséquences : ainsi le logarithme d'une fonction uniforme ou algébrique ne peut vérifier l'équation $f = 0$, sauf dans le cas où $f$ ne contient pas $u$.

la fonction $u'(z, v_0)$ peut se développer ainsi

$$u'(z, v_0) = \frac{h}{z - z_0} + a + b(z - z_0) + \ldots,$$

$h$ n'étant pas nul, et l'intégrale $\int u'(z, v_0)\,dz$ présente un point logarithmique, ce qui est impossible. L'équation (2) doit par suite être linéaire, et son intégrale $u'$ est égale à $v\mathrm{H}'(z) + \mathrm{G}'(z)$. Quant à l'intégrale $u(z)$, elle est de la forme

$$u(z) = v\mathrm{H}(z) + \mathrm{G}(z) + \mathrm{P}(v).$$

En définitive, pour que l'équation $u = \mathrm{F}(z, u')$ ait une intégrale générale uniforme, il faut et il suffit que le quotient $\dfrac{u' - \dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial z}}{\dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial u'}}$ soit un polynôme du premier degré en $u'$, $\alpha u' + \beta$, et que l'équation $u'' = \alpha u' + \beta$ ait son intégrale uniforme.

8. En employant le même raisonnement que plus haut, on montre que si l'intégrale d'une équation $\mathrm{F}(u', u, z) = 0$ (où F est un polynôme de degré $p$ en $u'$ et une fonction uniforme de $u$ et de $z$) n'admet pas plus de $n$ valeurs, cette intégrale peut se mettre sous la forme $f(z, u, u_0) = 0$, $f$ désignant une fonction uniforme de $z$ et un polynôme de degré $np$ en $u$ et $u_0$. En tenant compte de la remarque que nous avons faite à la fin du paragraphe précédent, on en conclut que si l'intégrale d'une équation $\mathrm{F}(u', u, z)$ (où F est un polynôme, soit en $u$, soit en $u'$, à coefficients uniformes) n'admet pas plus de $n$ valeurs, F est nécessairement un polynôme en $u$ et en $u'$, ou que, du moins, l'équation peut se ramener à une équation de cette forme. Pour de telles équations, M. Fuchs [1] a indiqué à quelles conditions l'intégrale générale n'a que des points critiques fixes. Allant plus loin, M. Poincaré [2] a montré que, lorsque les conditions de M. Fuchs sont satisfaites, l'équation se ramène à une équation de Riccati, si la relation entre $u'$ et $u$ (où on laisse $z$ constant) est du genre 0; elle se ramène à des quadratures, si cette relation est du genre 1, et elle s'intègre algébriquement si le genre est supérieur à l'unité. L'étude des cas où l'intégrale de l'équation $\mathrm{F} = 0$ est uniforme est

---

(1) *Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin*, 26 juin 1884.

(2) *Acta mathematica*, t. VII, 1885.

ainsi complète. On peut, sans faire intervenir le genre, donner les conditions qu'il faut ajouter à celles de M. Fuchs pour que l'intégrale soit uniforme, en suivant une méthode analogue à celle de MM. Briot et Bouquet pour le cas particulier où $z$ n'entre pas dans F explicitement. Pour le moment, nous nous bornons à étudier un cas particulier du problème traité par M. Poincaré, ce qui va nous conduire à une généralisation du théorème de M. Hermite sur les équations $F(u', u) = 0$, où F est un polynôme en $u'$ et $u$.

J'envisage une équation de la forme

$$A(u', u, z) + U B(u', u, z) = 0, \tag{1}$$

où A et B désignent deux polynômes en $u'$ et deux fonctions uniformes de $u$ et de $z$, et U une fonction algébrique définie par la relation irréductible $F(u, U) = 0$. On peut toujours supposer que la relation (1) est irréductible, c'est-à-dire que A et B n'admettent pas de facteur commun $\psi(u', u, z)$. On obtient l'équation différentielle sous sa forme ordinaire $f(u', u, z) = 0$, en remplaçant, dans $F = 0$, U par $-\frac{A}{B}$. Les théorèmes énoncés au n° 5 s'appliquent à cette équation.

Si une intégrale $u = \varphi(z)$ est uniforme dans l'espace où elle existe, elle existe dans tout le plan, et n'y admet que des points essentiels. Il en est de même de $u' = \varphi(z)$. De plus, si l'on remplace, dans A et B, $u$ et $u'$ par $\varphi$ et $\varphi'$, aucune des deux fonctions ne peut être indéterminée, quel que soit $z$; autrement pour $u = \varphi(z)$, la fonction $u'$ définie par $f(u', u, z) = 0$ est indéterminée, et l'on ne peut dire que $\varphi$ est une intégrale de $f = 0$. Il est impossible également que A ou B soit nul, quel que soit $z$ pour $u = \varphi(z)$, autrement la relation $F(u, U) = 0$ serait vérifiée, quel que soit $u$, par $U = 0$, ou $U = \infty$. Mais il peut arriver que A et B soient nuls à la fois pour toute valeur de $z$: la fonction $u = \varphi(z)$ vérifie alors la relation $\chi(z, u) = 0$ obtenue en éliminant $u'$ entre $A = 0$ et $B = 0$. En conséquence, si l'équation admet une intégrale uniforme ne vérifiant pas la relation $\chi = 0$, la fonction $U = \frac{-A(\varphi', \varphi, z)}{B(\varphi', \varphi, z)}$ est une fonction uniforme de $z$, qui ne saurait présenter de coupure, puisqu'elle dépend algébriquement de $u(z)$ et que $u(z)$ n'en présente pas. D'après un théorème bien connu de M. Picard, les coordonnées $u$ et U de la courbe algébrique $F = 0$ s'exprimant en fonctions uniformes et sans coupures d'un paramètre $z$, la courbe est du genre 0 ou 1. *L'intégrale générale de* (1) *ne peut être uniforme que si le genre de* $F = 0$ *ne dépasse pas l'unité.*

Envisageons maintenant une équation $G(u', u, z, U) = 0$ où $G$ est un polynôme en $u'$ et en $U$ dont les coefficients sont uniformes en $u$ et $z$ : on peut toujours supposer que $U$ n'entre dans $G$ qu'au degré $(n-1)$, $n$ étant le degré de $F$ en $U$. L'équation s'obtient sous la forme ordinaire en éliminant $U$ entre les relations $G = 0$, $F = 0$. Pour tout système $u'_0$, $u_0$, $z_0$ vérifiant la condition $f = 0$, les équations $G = 0$, $F = 0$ ont une racine commune, et en général une seule, qu'on obtient en fonction uniforme de $u'_0$, $u_0$, $z_0$,

$$A(u'_0, u_0, z_0)U + B(u'_0, u_0, z_0) = 0.$$

Le raisonnement fait plus haut s'applique encore ici, à moins que, pour $u = \varphi(z)$, $u' = \varphi'(z)$, $A$ et $B$ ne soient nuls identiquement. On peut donc énoncer ce théorème : *Si l'équation proposée admet une intégrale particulière uniforme* $u = \varphi(z)$, *la relation* $F = 0$ *est du genre* 0 *ou* 1, à moins que, pour $u = \varphi(z)$, $u' = \varphi'(z)$, les deux équations en $U$, $F = 0$, $G = 0$, n'aient plusieurs racines communes, quel que soit $z$. Si l'on exprime que $F = 0$ et $G = 0$ ont deux racines $U$ communes, on obtient d'ordinaire deux relations distinctes en $u'$, $u$, $z$ et, en éliminant $u'$ entre ces deux relations, une certaine relation $\psi(z, u) = 0$ entre $z$ et $u$. On peut toujours vérifier si cette relation définit une fonction uniforme satisfaisant à l'équation différentielle. Quand $\psi(z, u) = 0$ se réduit à une identité, quels que soient $z$ et $u$, pour une valeur de $u'$ vérifiant la condition $f = 0$, les deux équations $G = 0$, $F = 0$ ont plusieurs racines communes. Nous écartons ici ce cas particulier qui demande une discussion spéciale. Dans tout autre cas, l'intégrale générale de l'équation ne peut être uniforme si $F = 0$ est de genre supérieur à 1.

Considérons de même l'équation

$$G(u', u, z, U, U_1, \ldots, U_{n-1}), \tag{2}$$

où $G$ est un polynôme en $u'$, $U$, $U_1, \ldots, U_{n-1}$, et $U$, $U_1, \ldots, U_{n-1}$ des fonctions algébriques de $u$ définies par les relations

$$F(u, U) = 0, \qquad F_1(u, U_1) = 0, \qquad \ldots, \qquad F_{n-1}(u, U_{n-1}) = 0. \tag{3}$$

L'équation différentielle s'obtient sous la forme $f(u', u, z) = 0$ en éliminant $U, \ldots, U_{n-1}$ entre les relations (2) et (3). Pour tout système $u'_0$, $u_0$, $z_0$ vérifiant la condition $f = 0$, les équations simultanées (2) et (3) n'ont en général qu'un système de solutions $U$, $U_1, \ldots, U_{n-1}$, qui s'expriment linéairement en fonction de $u'_0$, $u_0$, $z_0$. On en conclut que si l'intégrale $u = \varphi(z)$

est uniforme, $U, U_1, \ldots, U_{n-1}$ sont des fonctions uniformes de $z$ sans coupures. *Les relations qui lient* $U_i$ *à* $u$ *et celles qui lient* $U_i$ *à* $U_j$ *sont, en conséquence, de genre* 0 *et* 1. Ceci suppose toutefois que pour $u = \varphi(z)$, $u' = \varphi'(z)$, les équations (2) et (3) n'admettent pas plusieurs solutions communes quel que soit $z$.

Le théorème s'applique aussi bien si, dans l'équation

$$G(u', u, z, U, \ldots, U_{n-1}),$$

$U, U_1, \ldots, U_{n-1}$ sont fonctions algébriques, non plus de $u$, mais de $u'$; car si $u(z)$ est uniforme et sans coupure, il en est de même de $u'(z)$. Quand G est un polynôme en $u, U, U_1, \ldots, U_{n-1}$, et une fonction uniforme de $u'$ et de $z$ [$U, U_1, U_{n-1}$ vérifiant les relations $F_i(u', U_i) = 0$], on élimine $u$ entre $G = 0$ et $\frac{dG}{dz} = 0$, en remplaçant dans cette dernière équation $\frac{dU_i}{dz}$ par $-\frac{1}{\frac{\partial F_i}{\partial U_i}} \frac{\partial F_i}{\partial u'} u''$. On obtient ainsi une équation

$$G_1(u'', u', z, U, U_1, \ldots, U_{n-1}) = 0;$$

si une intégrale $u(z)$ est uniforme, $u'(z)$ est uniforme, et le théorème énoncé s'applique à l'équation $G_1 = 0$ : les relations $F_i = 0$ sont donc du genre 0 ou 1.

Enfin, si $U, U_1, \ldots, U_{n-1}$ sont fonctions algébriques de $z$, l'équation n'admet d'intégrale uniforme $u = \varphi(z)$ qu'au cas où $U, U_1, \ldots, U_{n-1}$ sont rationnels en $z$, à moins que, pour $u = \varphi(z)$, $u' = \varphi'(z)$, les équations $F_i(z, U_i) = 0$, $G = 0$ n'aient plusieurs solutions communes.

Sous sa forme la plus générale, le théorème peut s'énoncer ainsi. Soit

$$(3) \qquad G(u', u, z, U, \ldots, U_{n-1}, V, \ldots, V_{p-1}, W, \ldots, W_{q-1}) = 0$$

une équation différentielle où G est un polynôme en $u'$ (ou en $u$), et en $V_i$, $V_j$, $W_k$ : $U_i$, $V_j$, $W_k$ sont respectivement des fonctions algébriques de $u$, de $u'$ et de $z$, définies par les relations

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \varphi_1(u, U, \ldots, U_{n-1}) = 0, & \psi_1(u', V, \ldots, V_{p-1}) = 0, & \chi_1(z, W, \ldots, W_{q-1}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n(u, U, \ldots, U_{n-1}) = 0, & \psi_p(u', V, \ldots, V_{p-1}) = 0, & \chi_q(z, W, \ldots, W_{q-1}) = 0. \end{array} \right.$$

*Quand une intégrale* $u = \varphi(z)$ *de cette équation est uniforme, les* $W_k$ *sont des fonctions uniformes de* $z$, *et les relations qui lient* $U_i$ *à* $U_j$ *ou à*

$u$, $V_i$ *à* $V_j$, *ou à* $u'$, *sont du genre* o *ou* 1 [à moins que, pour $u = \varphi(z)$, $u' = \varphi'(z)$, le système d'équations (3) et l'équation $G = 0$ n'aient, quel que soit $z$, plusieurs systèmes de solutions communes]. Si l'intégrale générale de $G = 0$ est uniforme, les conditions précédentes sont remplies, à moins que, pour tout système $z_0$, $u_0$ et pour une valeur $u'_0$ vérifiant la condition $f(u'_0, u_0, z_0) = 0$, ledit système n'admette plusieurs systèmes de solutions communes, ce qu'on reconnaît sans peine par des opérations purement algébriques.

Revenons à l'équation $G(u', u, z, U) = 0$, où U vérifie la relation algébrique $F(u, U) = 0$, et supposons que $u'$ n'entre qu'au *premier degré dans* G. Si l'on écarte le cas exceptionnel indiqué, on sait que l'intégrale générale de l'équation ne peut être uniforme que si la courbe $F = 0$ est du genre o ou 1. Admettons que cette première condition soit satisfaite, et cherchons le cas où cette intégrale est effectivement uniforme.

La courbe $F = 0$ étant du genre o ou 1, ses coordonnées $u$ et U peuvent s'exprimer en fonction rationnelle et algébrique d'un paramètre $t$ et d'un radical du quatrième degré en $t$, $\sqrt{R(t)}$,

$$u = A(t) + \sqrt{R(t)}B(t) = \varphi(t),$$
$$U = C(t) + \sqrt{R(t)}D(t) = \psi(t),$$

et cela de telle sorte qu'à tout point $(u_0, U_0)$ de la courbe $F = 0$ ne corresponde qu'une seule valeur de $t$,

$$t = \chi(u, U),$$

$\chi$ étant rationnel. Supposons $u$ et U exprimées en fonction uniforme de $z$ :

$$u = \varphi_1(z), \qquad U = \psi_1(z);$$

on a

$$t = \chi(\varphi_1, \psi_1) = g(z):$$

$t$ est donc fonction uniforme de $u$. Si l'on pose $u = \varphi(t)$, l'équation à laquelle satisfait la fonction $t(z)$ a son intégrale rationnelle, en même temps que l'équation proposée. Cette équation est de la forme (en remplaçant $u$ et U en fonction de $t$),

$$t' = M(t, z) + N(t, z)\sqrt{R(t)},$$

M et N étant uniformes en $t$ et $z$. N est toujours identiquement nul, si $F = 0$ est du genre o; et le fait peut aussi se présenter quand la courbe est

du genre 1. Dans cette hypothèse, l'équation se réduit à

$$t' = \mathrm{M}(t, z),$$

et M *doit être un polynôme du second degré en t*. On se trouve ramené à l'équation de Riccati dont la discussion a été faite précédemment. Si l'intégrale de cette équation est uniforme, on peut l'écrire

$$t = \frac{vg + h}{vg_1 + h_1} \qquad \text{ou bien} \qquad -v = \frac{th_1 - h}{tg_1 - g},$$

$g$, $g_1$, $h$, $h_1$ étant uniformes. Quand la courbe $\mathrm{F} = 0$ est du genre 0, $u = \varphi[t(z)]$ est toujours uniforme avec $t(z)$; il en est de même chaque fois que $\varphi(t)$ ne dépend pas de $\sqrt{\mathrm{R}(t)}$. Au cas contraire, $u$ n'est jamais uniforme; il faudrait pour cela que $\sqrt{\mathrm{R}[t(z)]}$ fût rationnel en $z$, et, par suite, que chacune des équations $\theta = \frac{vg + h}{vg_1 + h_1}$ n'eût pour toute valeur de $v$ que des racines de multiplicité paire [$\theta$ désigne une des quatre racines $t_0$, $t_1$, $t_2$, $t_3$ de $\mathrm{R}(t)$]. Ceci exige que les racines de l'équation $-v = \frac{\theta h_1 - h}{\theta g_1 - g}$ soient multiples pour toute valeur de $v$, et, comme on n'a pas identiquement $\frac{g}{g_1} = \frac{h}{h_1} = \theta$, la condition ne peut être vérifiée que si la dérivée de $\frac{\theta h_1 - h}{\theta g_1 - g}$ est nulle identiquement, c'est-à-dire si cette fonction est une constante $-v_0$. Pour $v = v_0$, $t(z) = \frac{v_0 g + h}{v_0 g_1 + h_1}$ est constamment égale à $\theta$, et pour toute autre valeur de $v$, $t(z)$ ne prend pas la valeur $\theta$. Mais ceci ne peut avoir lieu pour les quatre valeurs de $\theta$, autrement des fonctions uniformes $\frac{vg + h}{vg_1 + h_1}$ (sans coupures) ne prendraient dans le plan aucune des quatre valeurs $t_0$, $t_1$, $t_2$, $t_3$, ce qui est en contradiction avec le théorème de M. Picard sur les zéros des fonctions uniformes. On voit donc que si N est identiquement nul, il faut et il suffit, pour que $u(z)$ soit uniforme, que la fonction *$t(z)$ soit elle-même uniforme et que $u = \varphi(t)$ ne renferme pas $\sqrt{\mathrm{R}(t)}$.*

Traitons maintenant le cas où N n'est pas identiquement nul; $\mathrm{F} = 0$ est alors du genre 1. La fonction $t$ vérifie l'équation

$$(4) \qquad \frac{dt}{dz} = \mathrm{M}(t, z) + \mathrm{N}(t, z)\sqrt{\mathrm{R}(t)}.$$

D'après la remarque faite au début du paragraphe, quand l'intégrale $t$ est uniforme, M et N sont des fonctions algébriques de $t$. Si l'on observe que $t$

ne peut figurer au dénominateur de M et de N, et que la même condition doit être remplie pour l'équation transformée en $\frac{1}{t}$, on voit que M est un polynôme du second degré en $t$, et N une fonction de $z$ seulement (ceci résulte d'ailleurs des conditions de M. Fuchs). D'autre part, si $\theta$ désigne une racine de $R(t) = 0$, $\theta$ doit annuler $M(\theta, z)$, quel que soit $z$. Soit, en effet, $z_0$ une valeur de $z$ pour laquelle $M(\theta, z)$ et $N(z)$ sont holomorphes, et considérons une intégrale $t(z)$, égale à $\theta$ pour $z = z_0$. Si cette intégrale est uniforme, elle est holomorphe, ainsi que ses dérivées, au point $z_0$; or, quand on calcule $t''$, on voit que $t'' = \alpha + \frac{N(z_0)t'(z_0)}{\sqrt{R(t)}}$, $\alpha$ étant une quantité finie; $t''$ ne peut donc être finie pour $z = z_0$ que si $t'(z_0)$ est nulle, ce qui exige que la quantité $M(\theta, z_0)$ soit nulle; mais $M(t, z_0)$ est du second degré en $t$, et ne peut s'annuler pour les quatre valeurs de $\theta$, à moins d'être identiquement nul; comme ceci a lieu quel que soit $z_0$, $M(t, z)$ est identiquement nul. L'équation (4) doit donc se réduire à la suivante :

$$\frac{dt}{dz} = N(z)\sqrt{R(t)}$$

ou bien

$$\frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = N(z)\,dz$$

ou enfin

$$t = \operatorname{sn}(\zeta + C),$$

$\zeta$ désignant l'intégrale $\int_{z_1}^{z} N(z)\,dz$ et C une constante. C'est le résultat obtenu par M. Poincaré dans le cas général où la relation $F(u', u, z) = 0$ (entre $u'$ et $u$) est du genre 1.

Dans le cas actuel, la fonction $N(z)$ étant rationnelle, les diverses valeurs de $\zeta$ en un point $z$ sont de la forme $\zeta_1(z) + 2mi\pi a + 2m'i\pi b + \ldots$ ($a$ et $b$ étant des constantes). Soit $2i\pi\omega$, $2i\pi\omega$ les périodes de $\operatorname{sn}(z)$; pour que $t = \operatorname{sn}(\zeta + C)$ soit uniforme, il faut et il suffit que tous les résidus de N soient égaux à $m\omega + p\omega'$ ($n$ et $p$ désignant des entiers quelconques) : la fonction $\operatorname{cn}(\zeta + C)\operatorname{dn}(\zeta + C)$ est alors uniforme, et par suite l'intégrale $u(z) = \varphi[\operatorname{sn}(\zeta + C), \operatorname{cn}(\zeta + C)\operatorname{dn}(\zeta + C)]$.

La discussion précédente s'applique aussitôt à l'équation $G(u', u, z, U) = 0$, où G est un polynôme en U et en $u$ (du premier degré en $u$) et une fonction uniforme de $u'$ et $z$, U dépendant algébriquement de $u'$ : $F(u', U) = 0$. Il suffit de différentier l'équation $G = 0$ par rapport à $z$, et de remplacer

$\frac{dU}{dz}$ par $-u'^2 \frac{\frac{\partial F}{\partial u'}}{\frac{\partial F}{\partial U}}$, pour ramener l'équation à la forme $u'' = G_1(u', z, U)$. On retombe sur la question précédente.

Les théorèmes sur lesquels nous nous sommes appuyés ont encore de nombreuses applications. Mais j'abandonne ce sujet pour le moment, et j'arrive à l'étude des conditions qui expriment qu'une fonction est continuable au delà d'une ligne analytique.

9. *Conditions pour qu'une fonction soit continuable au delà d'une ligne analytique.* — Nous avons démontré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction uniforme $F(z)$ soit continuable au delà d'une coupure L est qu'il existe une fonction $f(z)$ définie de l'autre côté de L et prenant sur L les mêmes valeurs que $F(z)$. Quand la ligne L est *analytique*, la condition prend une forme plus simple.

On sait qu'une ligne *analytique* est une ligne telle que ses deux coordonnées $x$ et $y$ soient fonctions analytiques d'un paramètre $t$; autrement dit, pour tout point $(x_0, y_0)$ de la courbe (sauf pour certains points formant une suite ponctuelle), $x$ et $y$ se mettent sous la forme

$$x - x_0 = a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \ldots,$$
$$y - y_0 = b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2 + \ldots;$$

les deux séries convergent pour des valeurs de $(t - t_0)$ suffisamment petites. Remplaçons $t$ par $\tau = t + t'i$ (les deux séries convergent encore), et posons

$$z = x + iy = \varphi(t + t'i) + i\psi(t + t'i) = G(\tau);$$

$z$ est une fonction analytique de $\tau$, et réciproquement la valeur de $\tau$ égale à $t_0$ pour $z = z_0$ est fonction analytique de $z$; $\tau = G_1(z)$. A un segment AB de L correspond un segment de l'axe $Ot$, à des points $z$ voisins de $z_0$ et situés de part et d'autre de L correspondent des points $\tau$ voisins de $t_0$, de part et d'autre de $Ot$, et inversement.

Soit $f(z)$ une fonction uniforme définie du côté C de L et qui admet cette ligne pour coupure. Si $f(z)$ est continuable au delà de L, il existe une fonction $F(z)$ coïncidant avec $f(z)$ du côté C de L, et holomorphe dans le voisinage d'un segment AB de L. Si l'on pose

$$f[G(\tau)] = f_1(\tau), \qquad F[G(\tau)] = F_1(\tau).$$

la fonction $F_1(\tau)$ prolonge, au delà de $Ot$, $f_1(\tau)$. Quand $f(z)$ est continuable au delà de AB, $f_1(\tau)$ est donc continuable au delà de $Ot$, et inversement. Pour $\tau = t$ ($t$ étant réel et voisin de $t_0$), $f_1(\tau)$ doit prendre une suite de valeurs $f_1(t)$ qui soient les valeurs pour $t' = 0$ d'une fonction $F_1(t + t'i)$, holomorphe dans le voisinage de $t_0$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $f_1(t)$ soit développable en série de Taylor pour des valeurs de $|t - t_0|$ suffisamment petites. Nous arrivons ainsi à la conclusion suivante : *pour que $f(z)$ soit continuable au delà de* AB, *il faut et il suffit que $f(z)$ prenne sur* AB *une suite de valeurs $f_1(t)$, fonction analytique de $t$.* Ajoutons que toute fonction analytique $f_1(t)$ peut être regardée comme représentant les valeurs sur AB d'une fonction analytique $f(z) = f_1[G_1(z)]$, définie de part et d'autre de AB.

On peut donner à la condition une forme encore plus simple, indiquée pour la première fois par M. Schwarz [1].

*Pour que la fonction $f(z)$ définie du côté* C *de* AB *soit continuable au delà de* AB, *il faut et il suffit que sa partie réelle* P (*ou sa partie imaginaire* Q) *prenne sur* AB *une suite de valeurs* $P_1(t)$, *fonction analytique de $t$.*

Supposons d'abord que $P(x, y)$ s'annule le long de AB. Posons, comme plus haut, $z = G(t)$, et

$$f[z(\tau)] = f_1(\tau),$$

où $f_1$ désigne aussi une fonction analytique de $\tau$. Pour que $f(z)$ soit continuable au delà de AB, il faut et il suffit que la fonction $f_1(t + t'i)$ soit continuable au delà du segment $A_1B_1$ de l'axe réel $Ot$. Soit

$$f_1(\tau) = f_1(t + t'i) = P_1(t, t') + i\,Q_1(t, t').$$

Par hypothèse, $P_1$ s'annule sur $Ot$ le long de $A_1B_1$ ; mais la fonction

$$-P_1(t, -t') + i\,Q_1(t, -t')$$

est une fonction analytique de $\tau$,

$$f_2(\tau) = P_2(t, t') + i\,Q_2(t, t').$$

Pour des points $\tau$ symétriques par rapport à $Ot$, $t + t'i$, $t - t'i$, les fonctions $Q_1(t, t')$, $Q_2(t, -t')$ coïncident; et, d'autre part, on peut prendre $t'$

(1) *Monatsberichte de l'Académie de Berlin*, octobre 1870.

assez petit pour que $|P_1(t, t')|$, $|P_2(t, -t')|$ soient inférieurs à tout nombre donné $\varepsilon$, quand le point $t$ décrit $A_1B_1$. Il en résulte que les deux fonctions $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ se raccordent le long du segment $A_1B_1$, et que $f_2(\tau)$ prolonge $f_1(\tau)$.

Passons au cas où $P(x, y)$ prend sur AB les valeurs $P_1(t)$, $P_1(t)$ étant une fonction analytique de $t$.

Soit encore $z = G(\tau)$. Inversement, $\tau = G_1(z)$. La fonction

$$P_1(\tau) = \mathfrak{P}(z)$$

est une fonction analytique de $z$, définie de part et d'autre de AB, et dont la valeur le long de AB est égale à $P_1(t)$; la fonction $f(z) - \mathfrak{P}(z)$, dont la partie réelle s'annule sur AB, est continuable au delà de AB; il en est de même en conséquence de $f(z)$, somme de deux fonctions continuables. La proposition est donc démontrée.

Ces deux théorèmes permettent de discuter plusieurs classes de coupures.

10. En premier lieu, considérons les fonctions

$$z_1 = \varphi(z),$$

qui représentent *d'une manière conforme* un espace S sur le demi-plan des $z$, situé au-dessus de l'axe des $x_1$. La condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi(z)$ soit continuable au delà du contour $s$ de $S_1$ est que ce contour *soit formé de lignes analytiques*.

La condition est nécessaire; car, si $\varphi(z)$ est continuable au delà d'un segment AB de $s$, inversement $z = \varphi_1(z_1)$ est continuable au delà de $Ox_1$; les points $z$ de AB vérifient donc l'équation $z = \varphi_1(x_1)$, où $x$ est réel, et où $\varphi_1$ est une fonction analytique de $x_1$; AB est par suite une ligne analytique.

La condition est suffisante; car, AB étant une courbe analytique, comme la partie réelle de $\varphi(z)$ s'annule sur AB, $\varphi(z)$ est continuable au delà de AB.

Quand une partie seulement $s'$ de $s$ est une ligne analytique, $\varphi(z)$ est continuable au delà de $s'$ et admet le reste de $s$ comme coupure essentielle.

Si tout le contour $s$ est analytique, il convient de distinguer plusieurs cas :

1° Pour tout point $(x_0, y_0)$ de $s$, $x$ et $y$ sont développables en série de

Taylor (nous prenons comme paramètre l'arc $l$ de $s$). On dira dans ce cas que *$s$ est formé d'une ligne analytique régulière*. La fonction $\varphi(z)$ est continuable au delà de $s$ et ne présente dans le voisinage de $s$ aucun point singulier.

2° Le développement de $x$ et $y$ est impossible pour certains points $(x_0, y_0)$; mais pour des points $z'(x', y')$, $z''(x'', y'')$, voisins et situés de part et d'autre de $(x_0, y_0)$, les développements de $z$ en fonction de $l$ relatifs, d'une part à $z'$, d'autre part à $z''$, coïncident pour des valeurs imaginaires de $l$ voisines de $l_0$; la fonction analytique de $l$, $x + iy = z(l)$ admet $l_0$ comme point singulier; nous dirons alors que le contour *$s$ est formé d'une seule ligne analytique*. La fonction $\varphi(z)$ est continuable au delà de $s$; elle présente ces points $z_0 = x_0 + iy_0$ comme points singuliers, mais n'offre pas de coupure dans le voisinage de $s$.

3° Les conditions précédentes ne sont pas remplies pour tous les points singuliers $(x_0, y_0)$. La fonction $z(l)$ présente des coupures qui passent par chacun des points exceptionnels $(x', y')$. On dira dans ce cas que *$s$ est formé de plusieurs lignes analytiques :* $\varphi(z)$ présente des coupures extérieures à $s$ et s'arrêtant à chaque point $z' = x' + iy'$.

Plus généralement, quand $z_1 = \varphi(z)$ représente d'une manière conforme un espace S du plan des $z$ sur un espace $S_1$ du plan des $z_1$, la fonction $\varphi(z)$ est continuable au delà du segment analytique AB de $s$, si le segment correspondant $A_1 B_1$ de $s_1$ est analytique; au cas contraire, AB est coupure essentielle de $\varphi(z)$.

11. Étudions maintenant le genre des coupures indiquées par M. Hermite et que présentent les intégrales de la forme

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{F(z, t)}{G(z, t)} dt,$$

où F et G sont des fonctions holomorphes de $z$, $G(z, t)$ n'ayant que des pôles simples.

Nous ferons dans ce but la remarque suivante : quand deux fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$ définies du côté opposé d'une ligne L prennent le long de L les valeurs $f(l)$, $f_1(l)$, dont la différence est $\varphi(l)$, la condition nécessaire et suffisante pour que $f(z)$ et $f_1(z)$ soient continuables au delà de L est que $\varphi(l)$ *représente les valeurs sur* L *d'une fonction analytique* $\varphi(z)$, *définie de part et d'autre de* L.

La condition est nécessaire : si $f$ et $f_1$ sont continuables, $f - f_1$ est une fonction analytique de $z$ qui existe de part et d'autre de L et dont la valeur sur L est $\varphi(l)$.

La condition est suffisante; car, si la fonction $\varphi(z)$ existe, la somme $f_1(z) + \varphi(z)$ prolonge $f(z)$ au delà de L.

Pour que l'énoncé soit vérifié, il faut et il suffit (d'après une remarque du lemme II du Chapitre II) que, $f(z') - f_1(z'')$ *tende uniformément vers* $\varphi(l)$, quand $z'$ et $z''$ tendent vers un point $\zeta$ de L, de part et d'autre de L, sur un certain chemin variant avec $\zeta$ d'une manière continue. Par exemple, on peut trouver un nombre $\varepsilon$ tel, qu'en portant sur la normale à L en chaque point $\zeta$ les longueurs $\zeta z' = \zeta z'' = \varepsilon$, de part et d'autre de $\zeta$, on ait

$$|f(z') - f_1(z'') - \varphi(l)| < \eta$$

($\eta$ étant un nombre positif aussi petit qu'on veut).

Quand la ligne L est analytique, il faut et il suffit, pour que $f$ et $f_1$ soient continuables, que $\varphi(l)$ soit une fonction analytique de $l$.

Appliquons cette remarque aux intégrales dont nous venons de parler, et tout d'abord à l'intégrale

$$\mathrm{J}(z) = \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{z-\zeta};$$

cette intégrale étant prise le long d'un certain chemin AB [$\zeta = g(l)$, si $l$ désigne l'arc de AB compris entre $\zeta_0$ et $\zeta$]; la fonction $f(\zeta)$ est définie en chaque point de AB, $f(\zeta) = f_1(l)$. De part et d'autre de AB, $\mathrm{J}(z)$ prend des valeurs différentes $\mathrm{J}_1(z)$, $\mathrm{J}_2(z)$ : quand les points $z'$ et $z''$ situés sur la normale en $\zeta$ à AB de part et d'autre de $\zeta$ tendent vers ce point, $\mathrm{J}_1(z') - \mathrm{J}_2(z'')$ tend vers $2i\pi f(\zeta)$. Si $f(\zeta)$ est discontinue, $\mathrm{J}_1$ et $\mathrm{J}_2$ ne peuvent être toutes deux continuables au delà de AB; si $f(\zeta)$ est continue, on voit sans peine que la différence $\mathrm{J}_1(z') - \mathrm{J}_2(z'')$ tend vers $2i\pi f(\zeta)$ uniformément le long de AB, sur la normale à AB. La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{J}_1$ et $\mathrm{J}_2$ soient continuables est donc que $f(\zeta)$ représente les valeurs sur AB d'une fonction analytique. Quand AB est une ligne analytique, il faut et il suffit que $f_1(l)$ *soit fonction analytique de* $l$. Si, par exemple, $f_1(l)$ n'admet pas de dérivée d'ordre $n$, les deux fonctions $\mathrm{J}_1$ et $\mathrm{J}_2$ ne sont pas continuables au delà de AB. On ramène à la précédente l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{F}(t)\,dt}{z-g(t)}$, en posant $\zeta = g(t)$; $f(\zeta) = \frac{\mathrm{F}(t)}{g'(t)}$.

Arrivons au cas plus général

$$J(z) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t, z)\,dt}{G(t, z)}.$$

Toutes les lignes AB, décrites par les points $z$ qui vérifient l'équation $G(\theta, z) = 0$, quand on donne à $\theta$ des valeurs réelles comprises entre $t_0$ et $t_1$, sont des coupures de $J(z)$. Soit $\zeta$ un de ces points, $\zeta = g(\theta)$, et soit $P(t, z) = \frac{\partial}{\partial t} G(t, z)$; quand les points $z'$ et $z''$, situés sur la normale en $\zeta$ à AB de part et d'autre de $\zeta$, tendent vers ce point, la différence $J_1(z') - J_2(z'')$ tend vers $\frac{F(\theta, \zeta)}{P(\theta, \zeta)} = \varphi(\theta)$, et cela uniformément le long de AB, si $\varphi(\theta)$ est continue. Lorsque $J_1$ et $J_2$ sont continuables, $\varphi(\theta)$ représente les valeurs sur AB d'une fonction analytique. Si AB est analytique, $\zeta = g(\theta)$ peut être fonction analytique de $\theta$; dans ce cas, $\varphi(\theta)$ doit être aussi fonction analytique de $\theta$; sinon, $\zeta$ est fonction analytique de $l$, $\theta = h(l)$, et $\varphi[h(l)]$ doit être fonction analytique de $l$.

On voit que, si F et G sont fonctions analytiques de $t$, les conditions sont satisfaites; les deux fonctions $J_1$ et $J_2$ sont continuables au delà de AB.

Quand $G(t, z)$ est fonction analytique de $t$, sans que F le soit, une au moins des deux fonctions n'est pas continuable.

La même discussion s'applique aux coupures des intégrales doubles indiquées par M. Laguerre.

12. Nous donnerons, pour terminer cette étude, quelques exemples des principales singularités qu'une fonction peut présenter dans le domaine d'une coupure.

Il convient d'abord de distinguer les coupures *fermées* des coupures *ouvertes*. Quand une coupure est *fermée* et enclôt l'espace S, il n'y a aucun rapport entre les deux fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$ représentées par les symboles à l'extérieur ou à l'intérieur de S. Il est facile de former, à l'aide d'intégrales ou de séries, une fonction $F(z)$ égale à $f(z)$ à l'extérieur de S, et présentant S comme espace lacunaire, ou égal dans S à une fonction quelconque $\varphi(z)$. Les deux fonctions $f$ et $\varphi$ peuvent admettre toutes deux le contour $s$ de S comme coupure essentielle, ou comme coupure artificielle; ou bien, l'une est continuable au delà d'un segment $s$ sans que l'autre le soit. Dans le cas où $s$ est coupure essentielle de $\varphi(z)$, par exemple, il n'existe, à aucun titre, une fonction qui puisse être regardée comme le pro-

longement naturel de $\varphi(z)$; car les symboles analytiques peuvent associer deux fonctions quelconques, et, d'autre part, on ne saurait trouver une fonction $\psi(z)$, telle que $\psi(z_1) - \varphi(z_2)$ tende vers o quand $z_1$ et $z_2$ tendent vers un point de $s$ de part et d'autre de cette ligne; autrement, $\varphi(z)$ serait continuable.

Quand $\varphi(z)$ est continuable au delà de S, la coupure $s$ peut être *purement artificielle;* il arrive, par exemple, que la fonction prolongée est holomorphe dans le plan.

Au contraire, soit AB une coupure *ouverte* de $f(z)$; de part et d'autre de AB, $f(z)$ prend des valeurs différentes $f_1(z')$, $f_2(z'')$; il est clair que les deux fonctions ne peuvent être associées arbitrairement. De plus, si $f_1(z')$ définie du côté C de AB est continuable au delà de AB par une fonction $\varphi(z)$, les points A et B sont nécessairement des *points singuliers* (critiques ou extrémités de coupures) de $\varphi(z)$; autrement, $z$ tournant autour du point A, après avoir franchi la coupure AB de C en C', la fonction $\varphi(z)$ prendrait, pour des points $z$ voisins de AB et situés du côté C de cette ligne, les valeurs $f_1(z')$, de même que la fonction $f_2(z)$; $\varphi(z)$ coïnciderait donc avec $f_2(z)$ pour les points $z''$ voisins de AB et situés du côté C' de AB, ce qui est impossible, $f_2(z)$ ne prolongeant pas $f_1(z)$.

Dans le cas d'une coupure ouverte AB, peut-il arriver que la *fonction* $f_1(z')$ *soit continuable au delà de* AB *sans que* $f_2(z'')$ *le soit aussi ?* Il est facile de former des exemples de ce fait; considérons un cercle C de centre O et de rayon R; formons une fonction $\varphi(z)$ ayant comme coupure essentielle la demi-circonférence située au-dessus de O$x$ et holomorphe dans le reste du plan. Posons $z = z_1 + \sqrt{z_1^2 - C^2}$, le signe du radical étant choisi de manière que $|z|$ soit inférieur à R. La fonction $\varphi(z) = \psi(z_1)$ est une fonction uniforme de $z_1$, admettant le segment AB de O$x_1$ comme coupure; quand $z_1$ tend vers AB du côté des $y_1$ positifs, $z$ tend vers un point de la demi-circonférence inférieure de C; $\psi(z_1)$ est par suite continuable au delà de AB quand $z_1$ passe du demi-plan supérieur au demi-plan inférieur; on voit de même que $\psi(z_1)$ n'est pas continuable quand $z_1$ tend vers AB du côté des $y$ négatifs.

On peut prendre encore une fonction $f(z)$ définie dans un espace S et qui n'est pas continuable au delà de cet espace. Si AB est une portion de $s$, sur laquelle $f(z)$ soit continue, on considère $\varphi(x) = \int_{AB} \frac{f(z)}{z-x}\,dz$; $\varphi(x)$ n'est pas continuable au delà de AB quand $x$ passe de S en S' (S' désignant l'es-

pace extérieur à S); au contraire, $\varphi(x)$ est continuable quand $z$ passe de S' en S, comme le montrent aussitôt les deux égalités

$$f(x) = \int_{z=AB} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \varphi(x),$$

pour $x$ intérieur à S, et

$$0 = \int_{z=AB} \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \varphi(x),$$

pour $x$ extérieur à S.

Un exemple très simple de fonctions continuables des deux côtés d'une coupure AB est offert par les fonctions multiformes qu'on rend uniformes en joignant leurs points critiques deux à deux. Inversement, si $f(z)$ présente une coupure AB jouissant de cette propriété, la fonction $f(z)$ peut-elle être considérée comme une branche d'une fonction multiforme n'ayant aux environs de AB que des points critiques distribués sur AB? On se rend compte du contraire de la manière suivante : soit $\varphi(z)$ une fonction ayant comme plus haut la demi-circonférence supérieure d'un cercle C comme coupure, cette coupure étant essentielle quand $z$ entre dans le cercle et artificielle quand $z$ en sort. Si l'on pose $z = z_1 + \sqrt{z_1^2 - C^2}$, la fonction $\psi(z_1) = \varphi(z)$ est continuable des deux côtés du segment AB de $Ox_1$; mais, si $z_1$ passe du demi-plan supérieur au demi-plan inférieur et tourne ensuite autour de B, la fonction $\psi_1(z_1)$ qui prolonge $\psi(z_1)$ présente AB comme coupure essentielle quand $z_1$ revient sur cette droite.

Nous avons, dans ce qui précède, donné les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit continuable au delà d'une coupure. Mais les conditions *nécessaires* peuvent prendre un grand nombre de formes : il suffit de reconnaître que la fonction ne présente pas dans le voisinage de la coupure un des caractères d'une fonction holomorphe, pour être certain que la coupure est essentielle. Ainsi, quand la fonction admet dans le voisinage d'une ligne une infinité de zéros, de pôles ou de points essentiels *formant une suite linéaire*, cette ligne est sûrement une coupure essentielle de la fonction. C'est le cas du cercle fondamental pour les fonctions fuchsiennes définies seulement dans ce cercle.

Si $f(z)$ est holomorphe dans le voisinage de AB, du côté C de cette ligne, sa valeur peut ne pas tendre vers une limite quand $z$ tend vers des points $\zeta$ de AB formant une suite linéaire [$f(z)$ est indéterminée sur le chemin $\zeta z$, $f(z)$ tend vers des limites différentes sur deux chemins $\zeta z$ différents].

Voici un exemple curieux de ce fait : considérons la fonction

$$h(z) = \frac{\alpha_1}{z-a} + \frac{\alpha_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{(z-a)^n} + \ldots.$$

On peut toujours prendre $n$ assez grand pour qu'à l'extérieur d'un cercle ayant $a$ pour centre et $\rho$ pour rayon le module du reste $R_n$ de la série soit inférieur à $\varepsilon$. Formons une suite de fonctions $h_1(z), \ldots, h_\mu(z), \ldots$, les points $a_\mu$ qui correspondent à ces fonctions étant tous distincts et distribués sur la ligne AB où ils forment une suite linéaire (ces points sont, par exemple, déterminés par la loi suivante : $a_1$ est le milieu de AB, $a_2$ et $a_3$ les milieux de $Aa_1$ et de $a_1B$, et ainsi de suite). Désignons par $\rho_\nu$ la distance minima de deux points quelconques pris parmi les $\nu$ premiers $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$. Pour chaque valeur de $\nu$, on peut prendre $n$ assez grand pour que

$$R_n^{(\nu)}(z) = \frac{\alpha_{n+1}^{(\nu)}}{(z-a_\nu)^{n+1}} + \ldots$$

ait un module plus petit que $\varepsilon_\nu$ pour tous les points M ou $z$ extérieurs à un cercle $C_\nu$ ayant $a_\nu$ pour centre et de rayon $\theta\rho_\nu$ ($\theta$ est un nombre déterminé plus petit que 1). Posons

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} R^{(\nu)}(z).$$

Cette série est uniformément convergente dans l'espace extérieur à tous les cercles $C_\nu$, si la série $\Sigma\varepsilon_\nu$ converge.

Faisons tendre M vers un des points $a_\nu$ (soit $a_\mu$) de manière qu'il reste extérieur aux cercles $C_{\mu+1}, C_{\mu+2}, \ldots$ (ce qui est toujours possible : si $\theta = \frac{1}{2}$, il suffit que M soit compris dans l'angle droit de sommet $a_\mu$ et dont la bissectrice est normale à AB). Dans ces conditions, $\varphi(z) - R^{(\mu)}(z)$ tend vers une valeur déterminée, car on peut toujours prendre $q$ assez grand pour que

$$\left| \sum_{q+1}^{\infty} R^{(\nu)}(z) \right|$$

soit inférieur à $\sigma$ et, d'autre part,

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=q} R^{(\nu)}(z) - R^{(\mu)}(z)$$

est holomorphe au point $a_\mu$. La fonction $\varphi(z)$ est donc *indéterminée comme* $R^{(\mu)}(z)$ *dans le voisinage de* $a_\mu$.

On peut également former des fonctions qui tendent vers des valeurs $f_1(l)$ discontinues quand $z$ tend vers AB sur certaines directions, par exemple sur la normale à AB. Soit $f(\theta)$ une fonction de la variable réelle $\theta$, discontinue dans tout intervalle, mais à variation limitée, et telle que la suite de valeurs $\frac{f(\theta+0)+f(\theta-0)}{2}$ soit discontinue. Si l'on cherche à développer cette fonction en série de Fourier, on obtient une série trigonométrique $\Sigma(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$, qui, pour toute valeur de $\theta$ entre $0$ et $2\pi$, est égale à $\frac{f(\theta+0)+f(\theta-0)}{2}$. La série $\Sigma(A_n - B_n i)z^n$ est une fonction F de $z$, dont la partie réelle, quand $z$ tend vers un point du cercle C de rayon 1 et de centre O, sur la normale à ce cercle, tend vers la valeur $\frac{f(\theta+0)+f(\theta-0)}{2}$, fonction discontinue de $\theta$. Quand $z$ tend vers un point de la circonférence C sur certains chemins, $F(z)$ est indéterminée.

Quand une fonction $F(z)$ prend sur une coupure AB une suite continue de valeurs $F_1(l)$, la coupure est essentielle au cas où, AB étant une ligne analytique, $F_1(l)$ n'admet pas de dérivée d'ordre $n$. Par exemple, les séries

$$\sum \frac{z^{a_n}}{a_n}$$

(dans lesquelles $a_n$ désigne $n^n$, ou $1.2\ldots n, \ldots$) représentent des fonctions holomorphes de $z$ dans le cercle C de rayon 1, qui prennent sur la circonférence de C une suite continue de valeurs $F_1(\theta)$, mais qui ne sont pas continuables au delà de C; car les séries

$$\sum \frac{\cos a_n \theta}{a_n}, \quad \sum \frac{\sin a_n \theta}{a_n}$$

sont des fonctions continues de $\theta$, n'admettant pas de dérivée, comme l'a démontré M. Darboux [1].

Les fonctions qui représentent un espace à contour analytique sur un espace dont le contour est tel que $\frac{d^n y}{dx^n}$ n'existe pas, fournissent un autre exemple de cette singularité. De même à toute fonction $V(x, y)$, satisfaisant à l'équation $\Delta V = 0$, qui prend sur un contour fermé $s$ une suite de

[1] *Mémoires sur les fonctions discontinues* (*Annales de l'École Normale supérieure*,

valeurs non analytique (le contour $s$ étant analytique), correspond une fonction de $z$, $V + iU$, qui présente $s$ comme coupure essentielle.

On peut encore considérer l'intégrale $F(z) = \int_{AB} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$, prise le long d'un chemin analytique AB, la fonction $f(\zeta) = f_1(l)$ n'admettant pas de dérivée $n^{\text{ième}}$ (ou étant discontinue, mais susceptible d'intégration). La fonction $F(z)$ n'est sûrement pas continuable des deux côtés de la coupure. Soit $J_1(z)$ et $J_2(z)$ les valeurs de $F(z)$ de part et d'autre de AB, soit de plus $f_1(l) = P(l) + iQ(l)$. Quand une seule des fonctions $P(l)$, $Q(l)$ est analytique, AB est coupure essentielle de $J_1$ et de $J_2$; car, si $J_1(z)$ est continuable, la fonction $J_2 - J_1$, définie d'un certain côté de AB, prend sur AB des valeurs dont la partie réelle (ou imaginaire) est fonction analytique de $l$, et n'est pas continuable au delà de AB, ce que nous avons démontré être impossible. Ces remarques s'étendent sans peine à l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} \frac{G(t, z)}{F(t, z)}\,dt$.

Au contraire, lorsque la ligne AB n'est pas analytique, la fonction $f(z)$ qui prend sur AB la suite des valeurs $f_1(l) = P(l) + iQ(l)$, fonction analytique de $l$, n'est pas continuable. Plus généralement, quand les dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$ n'existent que jusqu'à l'ordre $n$ pour la courbe AB, les dérivées de $f_1(l)$, si $f(z)$ est continuable, doivent exister jusqu'à l'ordre $n$ et seulement jusqu'à l'ordre $n$. Il suffit, pour le voir, de remarquer que les points $z$ de la courbe AB vérifient l'équation $f(z) = f_1(l)$, où $f(z)$ est analytique dans le voisinage de AB. Il faut même que la partie réelle $P(l)$ [ou imaginaire $Q(l)$] de $f_1(l)$ satisfasse à cette condition. Chaque fois qu'elle n'est pas remplie, la coupure AB est essentielle. On voit ainsi que l'intégrale $J(z) = \int_{AB} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$, où la fonction de $l$, $f(\zeta) = f_1(l)$, est analytique, le chemin AB ne l'étant pas, présente AB comme coupure essentielle. De même, les fonctions $F(z) = V + iU$ dont la partie réelle prend sur AB la suite analytique de valeurs $V_1(l)$, ne sont pas continuables au delà de AB. Enfin, lorsque la fonction $z_1 = \varphi(z)$ représente d'une manière conforme un espace S sur un espace $S_1$, et que la dérivée $\frac{d^n y}{dx^n}$ n'existe pas pour l'arc L de $s$, $\frac{d^n y_1}{dx_1^n}$ existant pour l'arc $L_1$ de $s_1$, L est coupure essentielle de $\varphi(z)$.

Ajoutons, pour terminer, que, si une fonction $f(z)$ prend sur AB des valeurs $f_1(l)$ dont la dérivée $\frac{df_1(l)}{dl}$ est continue, $f(z)$ prend sur AB les



valeurs $f_1(t)\dfrac{1}{\frac{dz}{dt}}$, ainsi que cela sera démontré dans la suite (ceci suppose toutefois $\frac{dz^2}{d^2 t}$ continue sur AB).

13. Dans l'étude qui précède, nous avons admis que la coupure AB n'était pas limite d'autres lignes singulières. Au cas contraire, quand un point $z$ tend vers un point $\zeta$ de AB, il rencontre une infinité de coupures $A_n B_n$ de $F(z)$. Si ces coupures sont essentielles, AB est nécessairement *coupure essentielle* de $F(z)$. Sinon, il convient de distinguer les deux cas suivants : lorsqu'il existe un espace S attenant à AB où la fonction $F(z)$ est continuable au delà de chaque coupure $A_n B_n$ par une fonction $F_1(z)$ qui existe au delà de AB, on peut dire que F est *continuable au delà de* AB; si cette condition n'est pas remplie, $F(z)$ n'est pas continuable. Par exemple, soit $f(z)$ une fonction uniforme définie de part et d'autre de $Ox$, admettant les points O et A de l'axe des $x$ comme points essentiels et les points $\frac{i}{n}$ et $a+\frac{i}{n}$ comme zéros simples. La fonction uniforme $F(z)=\sqrt{f(z)}$, qui présente comme coupures les droites $A_n B_n$ joignant $\frac{i}{n}$ à $a+\frac{i}{n}$, est continuable au delà de ces coupures et de OA. Considérons, au contraire, une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n(z), \ldots, f_n(z)$ désignant une fonction dont $Ox$ est coupure essentielle. La fonction $F(z)$ égale à $f_n(z)$ entre les droites $y=\frac{1}{n}$, $y=\frac{1}{n+1}$, est continuable au delà de ces droites, mais présente $Ox$ comme coupure essentielle. Dans ce cas, il arrive parfois que $F(z)$ tend vers des valeurs $F_1(x)$, fonction analytique de $x$, quand $z$ tend vers $Ox$; ainsi, appelons $\varphi(z)$ une fonction continue sur $Ox$, mais dont $Ox$ est coupure essentielle; on peut faire $f_1(z)=\varphi(z), \ldots, f_n(z)=\frac{\varphi(z)}{n}, \ldots$, et $F(z)$ tend vers o, quand $z$ tend vers $Ox$.

14. Les théorèmes précédents ont leurs analogues dans l'étude des fonctions V de deux variables qui satisfont à l'équation $\Delta V = 0$.

Quand deux fonctions uniformes $V(x,y)$, $V_1(x,y)$, définies du même côté d'une coupure AB, coïncident le long de cette ligne ainsi que $\frac{dV}{dn}$ et

$\frac{dV_1}{dn}$, elles coïncident dans le voisinage de la coupure. On le voit en raisonnant sur l'intégrale $\int_s \left[V(s)\frac{dLr}{dn} - \frac{dV}{dn}(s)Lr\right]ds$, comme sur l'intégrale $\int_s \frac{f(z)\,dz}{z-x}$.

Il suffit, pour que le théorème soit exact, qu'il existe une longueur $\lambda$ telle qu'en portant sur la normale à AB, en chaque point M, la longueur $MN = \lambda$, $|V(x,y) - V_1(x,y)|$ et $\left|\frac{dV(x,y)}{dn} - \frac{dV_1(x,y)}{dn}\right|$ soient inférieurs à tout nombre donné $\varepsilon$.

Quand les deux fonctions V et $V_1$ sont définies de part et d'autre de AB, elles se raccordent et forment une fonction analytique régulière de $x, y$, qui satisfait à l'équation $\Delta V = 0$. Il faut pour cela et il suffit que, si l'on porte sur la normale en M à AB les longueurs $MN = MN_1 = \lambda$, de part et d'autre de M, $|V(x,y) - V_1(x_1,y_1)|$ et $\left|\frac{dV}{dn}(x,y) - \frac{dV}{dn}(x_1,y_1)\right|$ soient inférieurs à $\varepsilon$ ($x, y$ étant un point de MN, $x_1, y_1$ de $MN_1$). Ceci résulte du lemme III du Chapitre II.

Par suite, la condition nécessaire et suffisante pour que $V(x,y)$ soit continuable au delà de AB est que la fonction $V_1$ existe. Il suffit encore que les différences $|V(x,y) - V_1(x_1,y_1)|$ et $\left[\frac{dV}{dn}(x,y) - \frac{dV_1}{dn}(x_1,y_1)\right]$ tendent uniformément le long de AB vers des valeurs $v(l)$, $v'(l)$ ($l$ désignant l'arc AM) qui puissent être considérées comme les valeurs sur AB d'une fonction $W(x,y)$ régulière et satisfaisant à $\Delta W = 0$.

La condition est également satisfaite quand V et $V_1$ se raccordent sur AB, en même temps que $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V_1}{\partial x_1}$ ou, plus généralement, que $V' = \alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \beta\frac{\partial V}{\partial y}$ et $V'_1 = \alpha\frac{\partial V_1}{\partial x} + \beta\frac{\partial V_1}{\partial y}$ ($\alpha$ et $\beta$ désignant deux fonctions de $l$, mais $V'$ et $V'_1$ différant de $\frac{\partial V}{\partial l}, \frac{\partial V_1}{\partial l}$). Ce que nous venons de dire s'applique évidemment aux fonctions $V(x,y,z)$ de trois variables, qui satisfont à l'équation $\Delta V = 0$.

Dans le cas où AB est une ligne analytique, il faut et il suffit, ainsi que nous l'avons démontré, que $V(x,y)$ prenne sur AB une suite de valeurs $v_1(l)$, fonction analytique de $l$, pour que $V(x,y)$ soit continuable au delà de AB. Quand cette condition est réalisée, les dérivées $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ sont elles-mêmes des fonctions analytiques régulières dans le voisinage de AB et pren-

nent en conséquence sur AB des valeurs $v'(l)$, $v''(l)$, $v'$ et $v''$ étant des fonctions analytiques de $l$. Mais existe-t-il toujours une fonction $V(x, y)$ *telle que* V *prenne sur* AB *des valeurs* $v_1(l)$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ *des valeurs* $v'(l)$, $v_1(l)$ *et* $v'(l)$ *étant fonctions analytiques de* $l$? On voit sans peine qu'il en existe une et une seule : soit $(x, y)$ un point de AB, $x = \varphi(l)$, $y = \psi(l)$; si $v$ existe, la fonction $\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y}$ est une fonction analytique de $z$ définie de part et d'autre de AB, et l'on a sur AB

$$\frac{\partial V}{\partial x} = v'(l), \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\frac{dv_1}{dl} - v'(l)\varphi'(l)}{\psi'(l)} = v''(l).$$

Or il existe une fonction $f(z)$ définie de part et d'autre de AB, et prenant sur AB les valeurs $v'(l) + iv''(l)$, fonction analytique de $l$. Si l'on pose $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z)$, la partie réelle de $F(z)$, $P(x, y)$, pour une valeur convenable de la constante d'intégration, satisfait aux conditions énoncées. D'après les premiers théorèmes, il est clair qu'il n'en saurait exister d'autres.

Plus généralement, on démontre de même qu'il existe une fonction $V(x, y)$ prenant sur AB les valeurs $v_1(l)$, et telle que $\alpha(l)\frac{\partial V}{\partial x} + \beta(l)\frac{\partial V}{\partial y}$ prenne sur AB les valeurs $v'(l)$ : $\alpha(l)$, $\beta(l)$, $v_1(l)$, $v'(l)$ étant des fonctions analytiques de $l$.

De ces théorèmes, on déduit au sujet des coupures des fonctions $V(x, y)$ des remarques identiques à celles qu'on a faites sur les coupures des fonctions de $z$.

Les conditions *nécessaires* pour qu'une fonction $v(x, y)$ soit continuable au delà d'une coupure analytique peuvent s'étendre aux fonctions $V(x, y, z)$ de trois variables. Mais il n'en est pas de même des conditions suffisantes.

Soit S une surface analytique, coupure d'une fonction $V(x, y, z)$. Nous appelons *fonction analytique* de deux ou trois variables une fonction qui pour tout point $(x_0, y_0, z_0)$ (sauf pour des points exceptionnels) est développable en série de Taylor, cette série convergeant tant que $|x - x_0|$, $|y - y_0|$, $|z - z_0|$ restent inférieurs à certaines valeurs, pour des valeurs réelles ou imaginaires de $x$, $y$, $z$.

Les fonctions $V(x, y, z)$ sont des fonctions analytiques. Une *surface*

*analytique* est une surface telle, que ses coordonnées $x$, $y$, $z$ s'expriment en *fonction analytique* de deux paramètres $\alpha$ et $\beta$

$$x = \varphi(\alpha, \beta), \qquad y = \psi(\alpha, \beta), \qquad z = \chi(\alpha, \beta),$$

$\varphi$, $\psi$, $\chi$ étant définies pour des valeurs réelles et imaginaires de $\alpha$, $\beta$ voisines de $\alpha_0$, $\beta_0$ (le couple $\alpha_0$, $\beta_0$ définit un point de la surface). Si $V(x, y, z)$ est continuable au delà de S, V prend sur S (ainsi que ses dérivées d'ordre quelconque) *des valeurs* $V_1(\alpha, \beta)$, *où* $V_1(\alpha, \beta)$ *est une fonction analytique de* $\alpha$, $\beta$; car remplaçons $x$, $y$, $z$ en $\alpha$, $\beta$ dans $V(x, y, z)$; les coordonnées $x$, $y$, $z$ sont définies en fonction de $\alpha$, $\beta$ pour des valeurs imaginaires de $\alpha$, $\beta$ voisines de $\alpha_0$, $\beta_0$, et $V(x, y, z)$ est définie pour des valeurs imaginaires de $x$, $y$, $z$ voisines de $x_0$, $y_0$; il en résulte que $V_1(\alpha, \beta)$ est une fonction de $\alpha$, $\beta$ définie pour les valeurs réelles et imaginaires de $\alpha$, $\beta$ voisines de $\alpha_0$, $\beta_0$; c'est donc une fonction analytique de $\alpha$, $\beta$. Il en est de même des valeurs de $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$ ou $\frac{dv}{dn}$, ....

Inversement, quand une fonction $V(x, y, z)$ prend sur S des valeurs $V_1(\alpha, \beta)$, et $\frac{\partial V}{\partial x}$ des valeurs $V'(\alpha, \beta)$, $V_1$ et $V'$ étant fonctions analytiques de $\alpha$, $\beta$, cette fonction est-elle continuable au delà de S? Autrement dit, existe-t-il une fonction $V(x, y, z)$ régulière de part et d'autre de S et vérifiant sur S ces deux conditions? Il n'en peut évidemment exister qu'une, et, si elle existe, les valeurs de ses dérivées partielles en un point $x_0$, $y_0$, $z_0$ de S s'obtiennent en dérivant les équations

$$V_1(x, y, z) = V_1(\alpha, \beta),$$
$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) = V'(\alpha, \beta)$$

et

$$\Delta V = 0.$$

La première condition donne, par dérivations successives, $(n+1)$ équations contenant linéairement les dérivées de V jusqu'à l'ordre $n$ inclusivement; la deuxième donne $n$ équations analogues; la troisième, $\frac{(n-1)n}{2}$; en tout, $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ équations linéaires, c'est-à-dire autant que de dérivées d'ordre $n$ et d'ordre inférieur. On peut donc calculer les valeurs au point $(x_0, y_0, z_0)$ de ces dérivées; si la série de Taylor formée à l'aide de ces valeurs

est convergente, la fonction $\Phi(x, y, z)$ ainsi définie vérifie les conditions énoncées. Mais il n'est pas démontré qu'elle converge nécessairement.

Dans le cas où la surface de S comprend une portion $\sigma$ de surface sphérique $\Sigma$, sur laquelle $V(x, y, z)$ s'annule [la fonction $V(x, y, z)$ étant régulière dans cette sphère et continue sur sa surface], $V(x, y, z)$ est continuable au delà de $\Sigma$, ainsi que le montre aussitôt l'égalité

$$V(x, y, z) = \int\int_{\Sigma} \frac{V_1(\alpha, \beta)(R^2 - a^2)\, d\sigma}{R r^3} = \int\int_{\Sigma - \sigma} \frac{V_1(R^2 - a^2)\, d\sigma}{R r^3},$$

où $r$ et $a$ ont une signification connue.

Toutes les formes de *conditions nécessaires*, pour qu'une fonction $f(z)$ soit continuable au delà d'une coupure, s'étendent sans peine aux fonctions $V(x, y, z)$ et permettent de trouver des fonctions V ayant différentes espèces de coupures essentielles.



# SECONDE PARTIE.

## DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DES FONCTIONS A SINGULARITÉS QUELCONQUES.

## CHAPITRE I.

1. Nous allons, dans cette seconde Partie, chercher à décomposer en sommes et en produits les fonctions affectées de coupures. Pour obtenir l'expression explicite en séries des fonctions auxquelles on se trouve ramené, il est nécessaire de savoir développer en série une fonction holomorphe dans une aire quelconque ou à l'extérieur d'une ligne quelconque. C'est ce point que nous traiterons dans le premier Chapitre.

Un premier mode de développement repose sur les propriétés de la *représentation conforme*. Soit une ligne quelconque $s$ du plan des $z$, assujettie à la seule condition de ne pas se couper. Il existe une fonction $z_1 = f(z)$ qui représente d'une manière conforme l'espace S extérieur à $s$ (ou l'espace intérieur à $s$, si $s$ est fermée) sur l'espace $S_1$ extérieur à un cercle C du plan des $z_1$ ayant l'origine pour centre. Autrement dit, $z_1$ est une fonction de $z$ holomorphe dans S (sauf en un point $z_0$ qui est un pôle), et telle qu'à chaque point $z_1$ de C corresponde un seul point $z$ de S, et réciproquement : $z = f_1(z_1)$ est holomorphe dans $S_1$, sauf en un point qui est un pôle. La fonction $f(z)$ dépend de trois constantes réelles arbitraires ; on peut faire correspondre à un point de S et à un point de son contour $s$ un point arbitraire de $S_1$ et de la circonférence $c$. Faisons correspondre les points à l'infini de S et de $S_1$ ; à l'extérieur de C, la fonction $z = \varphi(z_1)$ qui admet le point $\infty$ pour pôle se développe ainsi :

$$z = k_p z_1^p + \ldots + k z_1 + a + \frac{a_1}{z_1} + \frac{a_2}{z_1^2} + \ldots.$$

D'autre part, la fonction $z_1 = f(z)$, à l'extérieur d'un cercle C' ayant l'origine pour centre et comprenant $s$, est de la forme

$$z_1 = k'_q z^q + \ldots + k' z + a' + \frac{a_1}{z} + \ldots.$$

On en déduit que $p = q = 1$ et que, par suite,

$$z = k z_1 + a + \frac{a_1}{z_1} + \ldots.$$

La fonction $z = \varphi(z_1)$ contient encore une constante réelle arbitraire; on peut écrire

$$z = \varphi[z_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)],$$

$\alpha$ désignant une constante réelle.

Posons $z' = k z_1$; quand $z_1$ parcourt C, $z'$ décrit un cercle concentrique de rayon $R\rho$, si R est le rayon de C et $\rho$ le module de $k$. Dans ces conditions,

$$z = z' + a + \frac{\alpha_1}{z'} + \ldots,$$

et, si l'on change, en dernier lieu, $z' + a$ en $z_1$, il vient

$$z = z_1 + \frac{\alpha_1}{z_1 - a} + \ldots.$$

La limite de $|z - z_1|$ est zéro pour $z = \infty$. En définitive, étant donné l'espace S, il existe une fonction $z_1 = f(z)$, telle que $\lim|z - z_1|$ soit zéro pour $z$ infini, et qui représente d'une manière conforme l'espace S sur l'espace extérieur à un cercle bien déterminé $C_1$ du plan des $z_1$. La manière dont nous avons obtenu cette fonction montre qu'il n'en existe qu'une seule. Désignons par $a$ le centre de $C_1$; nous dirons, pour abréger, que $z_1 = f(z)$ [ou $z = \varphi(z_1)$] est *fonction figurative* de l'espace S et que *$a$ est l'affixe de la ligne $s$.*

Soit maintenant une fonction $u = F(z)$ holomorphe dans l'aire S (y compris le point $\infty$); posons $z = \varphi(z_1)$; la fonction $F_1(z_1)$, holomorphe à l'extérieur du cercle $C_1$, de centre $a$, se développe ainsi

$$h + \frac{A}{z_1 - a} + \frac{B}{(z_1 - a)^2} + \ldots + \frac{L}{(z_1 - a)^n} + \ldots,$$

et, comme $z_1 = f(z)$, on en conclut que $F(z)$ peut se mettre dans l'espace S sous la forme

(1) $$F(z) = h + \frac{A}{f(z) - a} + \frac{B}{[f(z) - a]^2} + \ldots.$$

Ceci s'applique à une quelconque des fonctions $z_1 = f(z)$ qui représentent S

sur un cercle d'une manière conforme. Mais la fonction figurative est la seule qui vérifie les égalités suivantes :

1° Soit $\sigma$ un contour fermé entourant $s$ :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\sigma F(z)\,dz = A.$$

En effet, l'intégrale précédente est égale à $\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma_1} g(z_1)\,dz_1$, $\sigma_1$ désignant un contour fermé entourant le cercle $C_1$, et $g(z_1)$ le produit $F_1(z_1)\frac{dz}{dz_1}$. D'après (1),

$$F_1(z_1) = h + \frac{A}{z_1 - a} + \frac{B}{(z_1-a)^2} + \ldots.$$

D'autre part,

$$dz = dz_1 - \frac{dz_1}{(z_1-a)^2} - \ldots.$$

Par suite,

$$g(z_1)\,dz_1 = dz_1\left[h + \frac{A}{(z_1-a)} + \frac{B}{(z_1-a)^2}\cdots\right]\left[1 + \frac{B'}{(z_1-a)^2}\cdots\right].$$

Le seul terme dont l'intégrale ne soit pas nulle est

$$\frac{A\,dz_1}{z_1-a}; \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_\sigma F(z)\,dz = A.$$

2° $\frac{1}{2i\pi}\int_\sigma z\,F(z)\,dz = Aa + B$, si $F(z)$ s'annule pour $z\infty$. Cette intégrale est égale à l'intégrale $\int_{\sigma_1}\frac{1}{2i\pi}\psi(z_1)\,dz_1$, où $\psi(z_1) = \varphi(z_1)F_1(z_1)\frac{dz}{dz_1}$. On voit, comme plus haut, que dans ce produit le seul terme dont l'intégrale ne soit pas nulle est

$$\frac{Aa+B}{z_1-a}dz_1, \qquad \text{par suite,} \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_\sigma z\,F(z)\,dz = Aa + B.$$

Quand les égalités précédentes sont vérifiées, pour une des fonctions $z_1 = f(z)$, on aperçoit aisément que $\lim|z_1 - z| = 0$ pour $z = \infty$. La fonction figurative jouit donc seule de ces deux propriétés. Ces remarques nous seront utiles dans la suite.

En particulier, si $s$ se réduit au point $a$, la fonction $F(z)$ peut se mettre sous la forme

$$A\left(\frac{\lambda z+\mu}{z-a}\right) + B\left(\frac{\lambda z+\mu}{z-a}\right)^2 + \ldots.$$

$\lambda$ et $\mu$ étant des constantes. Mais il faut que $\lambda = 0$ et que $\mu = 1$ pour que les égalités énoncées soient satisfaites. La fonction figurative devient donc $z_1 = z$ quand $s$ se réduit à un point.

Lorsque S est une aire à double contour, M. Schottky a montré que S peut se représenter d'une manière conforme sur la couronne comprise entre deux cercles concentriques. Il s'ensuit que $F(z)$ se développe dans l'aire S de la manière suivante :

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n f^n(z).$$

C'est la généralisation du théorème de Laurent.

2. Les modes de développement que nous indiquerons maintenant n'exigent la connaissance d'aucune fonction particulière relative à la ligne $s$.

En premier lieu, soit une aire quelconque S ne présentant pas d'angle rentrant et limitée par une courbe $s$. Traçons un cercle C tangent à $s$ au point M et extérieur à S. Si $a$ est le centre de C, $z$ l'affixe de M, $x$ un point intérieur à S, l'expression $\frac{1}{z-x}$ peut se développer ainsi

$$\frac{1}{z-x} = -\left[\frac{1}{x-a} + \frac{z-a}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{(z-a)^n}{(x-a)^{n+1}} + \ldots\right] = A(z).$$

Faisons parcourir au point $z$ la courbe $s$, $a$ variant avec $z$ d'une manière continue, sauf aux points anguleux de $s$ : la série $A(z)$ converge uniformément et représente $\frac{1}{z-x}$. D'autre part, si $F(x)$ est une fonction holomorphe de $x$ dans S, continue sur $s$, on a

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{F(z)\,dz}{z-x}.$$

Par suite,

$$-2i\pi F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_s F(z)\,\frac{(z-a)^n}{(x-a)^{n+1}}\,dz.$$

Mais on peut toujours tracer un contour extérieur à $s$, intérieur à la courbe $\sigma$ décrite par $a$, et formé de $k$ arcs de cercles tournant tous leur convexité vers $s$. A l'intérieur de ce contour, d'après un théorème de M. Appell,

$$\frac{1}{x-a} = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{a_n}{(x-\alpha_1)^n} + \frac{b_n}{(x-\alpha_2)^n} + \ldots + \frac{l_n}{(x-\alpha_k)^n}\right].$$

Les $a_n$, $b_n$, ..., $l_n$ sont des fonctions continues de $a$, par suite de l'arc $l = M_1 M$ de $s$; les $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_k$ sont des constantes. De même,

$$\frac{1}{(x-a)^\nu} = \sum_{n=\nu}^{n=\infty} \left[ \frac{a_n^\nu}{(x-\alpha_1)^n} + \ldots + \frac{l_n^\nu}{(x-\alpha_k)^n} \right].$$

Donc

$$\frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{F(z)(z-a)^{\nu-1}\,dz}{(x-a)^\nu} = \sum_{n=\nu}^{n=\infty} \frac{A_n}{(x-\alpha_1)^n} + \ldots + \frac{L_n}{(x-\alpha_k)^n} = \varphi_\nu(x)$$

et

$$(2) \qquad F(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \varphi_\nu(x).$$

Si S est l'aire extérieure à une certaine ligne ouverte $s$, on rentre dans le cas précédent, en posant

$$2z_1 = z + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(z-a)(z-b)}$$

($a$ et $b$ sont les affixes des extrémités de $s$). La fonction $F_1(z_1)$ est holomorphe à l'extérieur d'un certain espace et peut se mettre sous la forme 2. Il suffit, pour avoir le développement de $F(z)$, de remplacer $z_1$ en fonction de $z$.

Dans le cas où S est l'aire intérieure à une courbe convexe $s$, un raisonnement analogue au précédent permet d'obtenir des résultats plus simples :

Nous supposons que $s$ n'a en chacun de ses points qu'un contact simple avec sa tangente. Traçons un cercle C tangent à $s$ au point M et comprenant S à son intérieur. Si $a$ est le centre de C, $z$ l'affixe de M, $x$ un point intérieur à S, l'expression $\frac{1}{z-x}$ peut se développer ainsi

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} + \ldots = A(z).$$

Faisons parcourir au point $z$ la courbe $s$, $a$ variant avec $z$ d'une manière continue, sauf aux points anguleux de $s$. La série $A(z)$ converge sur $s$ uniformément et représente $\frac{1}{z-x}$. D'autre part, si $F(x)$ est holomorphe dans S et sur $s$, on a

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{F(z)\,dz}{z-x};$$

par suite,

$$(3) \qquad F(x) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_s \frac{F(z)(x-a)^n\,dz}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n(x),$$

$P_n(x)$ désignant un polynôme en $x$ de degré $n$. On voit donc qu'une fonction $F(x)$, holomorphe dans S, *peut se développer dans cette aire en série de polynômes.*

*Discussion.* — Nous avons admis qu'on pouvait tracer, en chaque point de $s$, un cercle tangent à la courbe et *comprenant s à son intérieur*. Ceci est exact si la courbe $s$ n'a, en chaque point, qu'un contact simple avec sa tangente. Soit, en effet, une courbe convexe passant par l'origine et ayant en ce point un contact simple avec $Ox$ ($Oy$ est dirigé vers le centre de courbure). Pour les valeurs de $x$ comprises entre $-\beta$ et $+\alpha$ ($-\beta$ et $+\alpha$ étant les abscisses des tangentes parallèles à $Oy$), on a

$$y = \varphi(x) = \frac{x^2}{1.2}\varphi''(\theta x).$$

Traçons un cercle tangent à $Ox$, de rayon supérieur au plus grand des nombres $\alpha$ et $\beta$, ainsi qu'à $d$ ($d$ désigne l'ordonnée de la tangente, parallèle à $Ox$). Si, entre $-\beta$ et $+\alpha$, l'ordonnée du cercle

$$Y = R - \sqrt{R^2 - x^2}$$

est plus petite que l'ordonnée correspondante de $s$ entre $\alpha$ et $-\beta$, le cercle comprend $s$ à son intérieur. Soit $\mu$ une valeur inférieure (ou égale) à la plus petite valeur de $\frac{f''(\theta x)}{2}$ entre $+\alpha$ et $-\beta$ ($\mu$ est positif) : entre $\alpha$ et $-\beta$, $y$ est supérieur ou égal à $\mu x^2$. Il suffit donc que $\mu x^2 - Y$ ne soit jamais négatif entre $-\beta$ et $+\alpha$. Ceci peut s'écrire

$$R - \mu x^2 < \sqrt{R^2 - x^2}$$

($R - \mu x^2$ est positif, puisque R est supérieur à $d$). Élevons au carré; il vient, après réduction,

$$R > \frac{\mu^2 x^2 + 1}{2\mu}.$$

Prenons maintenant un point M quelconque sur la courbe $s$; $x$ et $y$ sont fonctions d'un certain paramètre, et le long de $s$, $(x'y'' - y'x'')$ est, par

hypothèse, plus grand qu'un certain nombre positif. Menons en M la normale MY vers le centre de courbure; MX est la direction perpendiculaire à MY qui fait avec MY l'angle $-\frac{\pi}{2}$; si $\alpha$ désigne l'angle (MX, O$x$), un simple changement de variables montre que, pour le point M, $2\mu$ doit être égal ou inférieur à l'expression $\frac{x'y''-y'x''}{(x'\cos\alpha+y'\sin\alpha)^3}$ ($x$ variant dans l'intervalle où le dénominateur est positif). Cette condition est satisfaite à coup sûr si $2\mu$ est inférieur (ou égal) à la plus petite valeur sur $s$ de $\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$. Soient donc D la *distance maxima* de deux tangentes parallèles et $2m$ la *courbure minima* de $s$; il suffit de prendre R supérieur à la fois à D et à $\frac{m^2D^2+1}{2m}$, pour que les cercles de rayon R tangents intérieurement à $s$ renferment $s$.

Le raisonnement n'exige pas à la rigueur que $s$ admette en chaque point un cercle osculateur, c'est-à-dire que $\frac{d\alpha}{ds}$ tende vers une limite, mais seulement que, pour les valeurs de $\Delta s$ inférieures à un certain nombre $\delta$, le rapport $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ soit supérieur à une quantité finie, $2m$, le long de $s$.

Si $s$ présente des points anguleux, il suffit que la condition relative à R soit remplie pour chaque arc distinct de $s$.

Quand $x'y''-y'x''$ s'annule en des points $M_1$ de $s$ ne formant pas une suite linéaire, on décompose $s$ en deux parties : la première $\sigma$ comprenant ces points et dont la longueur peut être rendue aussi petite qu'on veut; la seconde $s-\sigma$; on raisonne sur $\int_{s-\sigma}\frac{F(z)\,dz}{z-x}$ comme sur l'intégrale analogue prise le long de $s$. On voit ainsi que cette intégrale peut se développer en série de polynômes : $\Sigma P'_n(n)$. Quand on fait tendre $\sigma$ vers zéro, l'intégrale relative à $\sigma$ tend vers zéro, et les polynômes $P'_n(n)$ tendent vers une limite $P_n(x)$; $\Sigma P_n(x)$ représente $F(x)$.

Si les points $M_1$ forment une suite linéaire sur $s$ (par exemple, si $s$ comprend des segments de droites), on a recours à la remarque générale suivante : soit une aire S intérieure (ou extérieure) à une courbe fermée $s$; s'il existe, en dehors de S, un point A, tel que, en posant $z_1=\frac{1}{z-a}$, l'espace S se transforme en un espace $S_1$ intérieur à une courbe convexe $s_1$, sans points d'inflexions, la fonction $F(x)$ peut se mettre, dans S, sous la

forme

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n\left(\frac{1}{x-a}\right).$$

A quelles conditions ce point A existe-t-il? On sait que la figure qui correspond à $s$ dans la transformation $z_1 = \frac{1}{z-a}$ peut coïncider avec la figure inverse de $s$ par rapport au point A (1 étant la puissance d'inversion). Si l'arc BC de $s$ tourne sa convexité vers A, l'arc inverse $B_1C_1$ tourne sa concavité vers A. Si BC tourne sa concavité vers A et si A est intérieur à tous les cercles C osculateurs de l'arc BC, $B_1C_1$ tourne sa concavité vers A. Si A est extérieur à tous les cercles C, $B_1C_1$ tourne sa convexité vers A. Quand un cercle C passe par A, $B_1C_1$ présente une inflexion.

Ceci posé, une discussion très simple montre que le point A existe aux conditions suivantes : S ne présente pas d'angle rentrant; de plus, si C' désigne les cercles osculateurs à $s$ en tous les points où $s$ tourne sa convexité vers S, C'' les cercles osculateurs aux autres points, il faut qu'il y ait, en dehors de S, une aire intérieure à tous les cercles C' et extérieure à tous les cercles C''.

Un point quelconque de cette aire jouit de la propriété énoncée.

Les cercles C' et C'' se réduisent à des droites aux points d'inflexion. Si, en particulier, $s$ est convexe, mais renferme des segments de droites, il faut, pour que A existe, que les demi-plans situés par rapport à ces droites du côté opposé à la courbe $s$ aient une partie commune (ceci a toujours lieu si $s$ ne renferme que deux segments de droites).

Quand le point A n'existe pas, on peut toujours (S étant une aire quelconque sans angle rentrant) décomposer $s$ en arcs PQ assez petits pour qu'il existe, en dehors de S, un point $\alpha$, tel que les cercles tangents à $s$ en chaque point de PQ et passant par $\alpha$ soient extérieurs à S. On peut écrire

$$\int_s \frac{F(z)\,dz}{z-x} = \sum \int_{PQ} \frac{F(z)\,dz}{z-x};$$

la fonction $f_1(x) = \int_{PQ} \frac{F(z)\,dz}{z-x}$ présente la ligne PQ comme coupure. Posons

$$x' = \frac{1}{x-\alpha}.$$

L'arc PQ se transforme en un arc P'Q' dont toutes les tangentes sont ordinaires et extérieures à l'aire S'. La fonction $f_1\left(\frac{1}{x'}+\alpha\right)$ est développable en série de polynômes dans un contour convexe $s'$ comprenant P'Q' et renfermant l'aire S'. Remarquons toutefois que $f_1$ devient infinie aux points P' et Q', mais de l'ordre de $Lz$ pour $z=0$; $\int_{s'}\frac{f_1\,dz'}{z'-x'}$ représente donc bien encore $f_1(x')$, et le raisonnement employé n'est pas en défaut. Il résulte de là que F(x) peut se développer ainsi, dans l'aire S,

$$(4)\qquad F(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left[P_n^1\left(\frac{1}{x-\alpha_1}\right)+P_n^2\left(\frac{1}{x-\alpha_2}\right)+\ldots+P_n^k\left(\frac{1}{x-\alpha_k}\right)\right],$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ étant des points extérieurs à S.

Le cas où S est l'aire extérieure à une ligne ouverte se ramène au précédent par la transformation déjà employée

$$2z_1=z+\frac{a+b}{2}+\sqrt{(z-a)(z-b)}.$$

Les développements (2), (3), (4) s'étendent facilement aux fonctions de plusieurs variables.

3. *Propriétés des développements* (2), (3) *et* (4). — Les développements (2), (3), (4) convergent uniformément et absolument dans toute aire intérieure à S et sans point commun avec $s$. Leur convergence est comparable à celle des progressions géométriques. Les dérivées de F(x) sont représentées par les séries obtenues en dérivant les différents termes de ces développements, séries qui sont de même forme que les premières.

Étudions, en particulier, le développement (2). Les termes $\varphi_\nu(z)$ de ce développement sont identiquement nuls dans l'aire $\Sigma$ extérieure aux cercles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, qui ne renferme pas S. Par suite, la somme de la série (2) est nulle dans $\Sigma_1$ et égale à F(x) dans S. On déduit de là un moyen de former des séries dont les termes sont des fonctions rationnelles, et qui représentent deux fonctions quelconques dans deux aires distinctes absolument quelconques.

Le développement (2) est possible d'une infinité de manières. En effet, quand la fonction $\varphi_\nu(x)$ est déterminée, ses coefficients ne le sont pas entièrement; de plus, on peut ajouter aux termes de la série (2) les termes d'une

série de la forme $\varphi_\nu(x)$, qui représente zéro dans l'aire $\Sigma'$, extérieure aux cercles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, et renfermant S.

Remarquons que, dans la démonstration, on peut remplacer la fonction $\frac{1}{z-x}$ par la fonction $\psi(z-x)$, $\psi(x)$ ayant au point $x=0$ un pôle d'ordre 1, dont le résidu est égal à l'unité, et ses points singuliers $A_1, A_2, \ldots$ étant tels que les points $x+A_1, x+A_2, \ldots$ restent compris dans l'aire $\Sigma$ quand $x$ reste compris dans l'aire $\Sigma'$. L'expression $\frac{1}{(x-\alpha_k)^n}$ est alors remplacée par $\frac{d^n}{dz^n}\psi(z-\alpha_k)$, et les coefficients sont indépendants de la forme de $\psi$. On peut prendre, par exemple, pour $\psi(z)$ la fonction $Z(z)$. On déduit de là, pour un contour quelconque, des remarques analogues à celles qu'a indiquées M. Appell dans le cas d'un contour d'arcs de cercles [1].

Si nous considérons les premiers termes de $\varphi_1(x)$

$$\varphi_1(x) = \frac{a'}{x-\alpha_1} + \ldots + \frac{l'}{x-\alpha_k} + \frac{a''}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots.$$

On voit que, dans le cas où S est l'espace extérieur à un contour $s$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_s F(x)\,dx = a' + b' + \ldots + l', \tag{2'}$$

c'est-à-dire que cette somme est égale *au résidu de la coupure s*.

Quand S est l'aire intérieure à $s$, rappelons-nous que

$$\frac{1}{x-a} = \frac{a_1}{x-\alpha_1} + \ldots + \frac{l_1}{x-\alpha_k} + \frac{a'_1}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots$$

et que

$$a_1 + b_1 + \ldots + l_1 = 0$$

identiquement. D'autre part,

$$a' = \frac{1}{2i\pi}\int_s a_1(z-a)f(z)\,dz, \qquad \ldots;$$

donc

$$a' + b' + \ldots + l' = \frac{1}{2i\pi}\int_s (z-a)f(z)(a_1+b_1+\ldots+l_1)\,dz = 0.$$

---

[1] *Mathematische Annalen*, t. XXI.

Ajoutons un mot au sujet des développements (3) et (4). Soit d'abord la série (3)

$$F(x) = \Sigma P_n(x) = \Sigma a_n^{(0)} + a_n^{(1)} x + \ldots + a_n^{(n)} x^n.$$

Comme les dérivées successives de $F(x)$ sont représentées par les séries que forment les dérivées des termes, on en conclut que la série

$$a_0^0 + a_1^0 + \ldots + a_n^0 + \ldots$$

converge et est égale à $F(0)$. Plus généralement,

$$a_p^p + a_{p+1}^p + \ldots + a_{p+n}^p + \ldots = \frac{F^p(0)}{1.2\ldots p}.$$

Les coefficients de (3) ne sont pas déterminés : on peut se donner arbitrairement les $n$ premiers termes du développement (si grand que soit $n$); on peut aussi exiger qu'à partir du $p^{\text{ième}}$ terme les polynômes ne renferment pas de terme de degré inférieur à $p$, et que, pour $\nu < p$, $P_\nu$ soit égal à $kx^\nu$; $k$ coïncide alors avec $\frac{F^\nu(0)}{1.2\ldots\nu}$.

Le développement (2) ne converge pas, *en général*, en dehors de S, car les séries que nous avons intégrées pour l'obtenir divergent en dehors de S. Mais posons $u = \varphi(z)$, $\varphi(z)$ étant holomorphe et sa dérivée ne s'annulant pas dans S. A l'aire S correspond une aire S' que nous supposons convexe; $z = \psi(u)$ dans S' [$\psi(u)$ est holomorphe]; on voit donc que $F(z) = F_1(u)$ est holomorphe dans S', et, par suite,

$$F_1(u) = \Sigma P_n(u),$$

$$F(z) = \Sigma P_n[\varphi(z)]. \tag{5}$$

Si à une valeur de $u$ correspondent, dans le plan des $z$, d'autres valeurs $z_1$, $z_2$, ..., la série (5) converge aussi dans les aires $S_1$, $S_2$, ... décrites par $z_1$, $z_2$, .... Cette remarque s'applique aussi bien aux développements (2) et (3).

Quand l'aire S est extérieure à un contour $s$,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ P_n^1\left(\frac{1}{x - \alpha_1}\right) + \ldots + P_n^k\left(\frac{1}{x - \alpha_k}\right) \right],$$

dans le cas le plus général. On voit que

$$\int_s F(x)\, dx = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^1 + b_n^1 + \ldots + l_n^1.$$

$a_n^1$ désignant le coefficient de $\frac{1}{x-\alpha_1}$ dans $P_n^1$, etc. On peut, dans ce développement, faire en sorte qu'à partir de $\nu = n$ les $P_\nu^k$ ne renferment plus de termes de degré inférieur à $n$ en $\frac{1}{x-\alpha_k}$, et que, pour $\nu < n$, les $P_\nu^k$ se réduisent à $\frac{h}{(x-\alpha_k)^\nu}$. Faisons, en particulier, $\nu = 3$; dans ce cas,

$$(4') \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_s F(x)\,dx = a_1^1 + b_1^1 + \ldots + l_1^1, \\ &\int_s x\,F(x)\,dx = (a_1^1\alpha_1 + a_2^1) + (b_1^1\alpha_2 + b_2^1) + \ldots + (l_1^1\alpha_k + l_2^1). \end{aligned} \right.$$

Quand $s$ se réduit à une ligne ouverte dont $a$ et $b$ sont les extrémités, on sait que les développements (2), (3), (4) subsistent à condition d'y remplacer $x$ par $x_1 = \frac{1}{2}\left[x + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x-a)(x-b)}\right]$ : le signe du radical étant choisi de sorte que $x_1$ devienne infinie avec $x$, $\lim |x_1 - x| = 0$ pour $x = \infty$. Si l'on se reporte aux égalités établies dans le n° 1, on voit que les égalités (2') et (4') sont encore vraies dans ce cas.

Telles sont les principales remarques relatives à ces développements. Il est facile d'appliquer, par exemple, le développement (3) à une aire convexe, formée d'arcs de cercles, disposés d'ailleurs d'une façon quelconque. Quand $F(x)$ est une constante, les coefficients se calculent aisément, et l'on obtient ainsi la somme de séries assez complexes. Mais je n'insiste pas davantage sur ce point pour le moment.

4. Nous avons, dans les raisonnements employés, supposé que $F(z)$ était *holomorphe dans* S *et continue sur* $s$; quand cette condition n'est pas remplie (sauf dans certains cas particuliers indiqués dans la première Partie, au lemme II du Chapitre II), l'intégrale $\int_s \frac{F(z)\,dz}{z-x}$ n'a plus de sens ou ne représente pas $F(x)$, et la démonstration donnée tombe en défaut.

Prenons, par exemple, le cas d'un contour convexe $s$. Soit $x$ un point de S; entourons ce point d'un contour fermé $\sigma$ intérieur à $s$ et convexe :

$$2i\pi\,F(x) = \int_\sigma \frac{F(z)\,dz}{z-x};$$

on peut écrire là encore

$$\int_\sigma \frac{F(z)\,dz}{z-x} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_\sigma \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} F(z)\,dz = \sum_{n=1}^{n=\infty} P_n(x)$$

($a$ étant une fonction continue de $z$), et la série $\Sigma P_n(x)$ converge dans $\sigma$: quand le contour $\sigma$ tend vers $s$, l'intégrale $\int_\sigma \frac{F(z)\,dz}{z-x}$ est constamment égale à $2i\pi F(x)$; mais rien ne prouve que les termes du second membre tendent respectivement vers une limite.

Supposons qu'il existe une fonction de $z$, $P+iQ$, holomorphe dans la partie de S voisine de $s$, continue sur $s$, et telle que, si l'on pose

$$P+iQ = z-a,$$

le point $a$, quand $z$ parcourt $s$, soit sur la normale en $z$ à $s$. Considérons dans S l'ensemble des courbes $\sigma$ voisines de $s$, et normales en chacun de leurs points $z$ à la droite joignant ce point $z$ au point $a$ défini par l'égalité précédente. Nous admettons encore que ces courbes sont fermées, sans points communs, et que chacune d'elles est comprise à l'intérieur des cercles qui passent par un de ses points $z$ et ont $a$ pour centre.

Choisissons une courbe $\sigma$ assez voisine de $s$ pour que $P+iQ$ soit holomorphe entre $s$ et $\sigma$; on peut écrire, pour tout point $x$ intérieur à $\sigma$,

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_\sigma \frac{F(z)\,dz}{z-x} = \frac{1}{2i\pi}\sum \int_\sigma \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} F(z)\,dz = \sum P_n(x).$$

Si l'on désigne par $\sigma'$ une seconde courbe $\sigma$, comprise entre $s$ et la première, pour tout point $x$ intérieur à $s'$,

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\sum \int_{\sigma'} \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} F(z)\,dz = \sum P'_n(x);$$

mais

$$\int_\sigma \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} F(z)\,dz = \int_{\sigma'} \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} F(z)\,dz.$$

Car la fonction placée sous le signe $\int$ est holomorphe entre $\sigma$ et $\sigma'$. Il en résulte que la série $\Sigma P_n(x)$ coïncide avec la série $\Sigma P'_n(x)$; elle converge donc à l'intérieur du contour $\sigma'$ et, par suite, dans l'aire S.

Tout revient, par suite, à trouver une fonction $P+iQ$ jouissant des

propriétés admises. Nous allons démontrer qu'il existe une telle fonction pour toute courbe convexe $s$, *n'ayant qu'un contact simple avec toutes ses tangentes, si, en chaque point $z$ de cette courbe, les dérivées* $\frac{dz}{dl}$, $\frac{d^2z}{dl^2}$ (*$l$ étant l'arc de courbe*) *existent et sont continues.*

Prenons comme paramètre arbitraire l'angle $\theta$ que fait avec la direction fixe $Ox$ la droite OM qui joint l'origine O, *intérieure à $s$*, à un point M de $s$. Le long de $s$, $\frac{d^2x}{d\theta^2}$, $\frac{d^2y}{d\theta^2}$ sont continues, et l'expression $\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ reste supérieure à un certain minimum positif.

Par hypothèse, la droite $(z-a)$ est normale à $s$, quand $z$ parcourt $s$. Il faut trouver une fonction $P+iQ$, telle que $\frac{Q}{P}$ tende vers $\frac{-x'}{y'}$ quand $z$ tend vers M, telle, par suite, que, le long de $s$,

$$P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Posons

$$\frac{P}{P^2+Q^2} = P_1, \qquad \frac{-Q}{P^2+Q^2} = Q_1;$$

il vient

$$P_1\,dx - Q_1\,dy = 0.$$

Si la fonction $P_1+iQ_1$ existe et que $U+Vi$ désigne son intégrale, U prend sur $s$ une valeur constante.

Ceci posé, la démonstration est facile dans le cas où $s$ est une *ligne analytique régulière.*

*Cas où $s$ est une ligne analytique régulière.* — Soit $z_1=\varphi(z)$ une des fonctions qui représentent, d'une manière conforme, l'espace S sur un cercle de centre O. Posons $U+Vi = L\,\varphi(z)$ : U prend une valeur constante $R_1$ le long de $s$. Nous avons démontré, dans la première Partie, que la fonction $U+iV$ est continuable au delà de S, et holomorphe dans le voisinage de $s$, de part et d'autre. Il en est de même de ses dérivées successives. Soit $P_1 = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q_1 = -\frac{\partial U}{\partial y}$; le long de $s$, $P_1\,dx - Q_1\,dy = 0$; $P_1$ et $Q_1$ ne s'annulent pas à la fois sur $s$, sinon la courbe $s$, $U(x,y)=R_1$, présenterait un point singulier.

Si l'on pose

$$P = \frac{P_1}{P_1^2+Q_1^2}, \qquad L = -\frac{Q_1}{P_1^2+Q_1^2},$$

la fonction $P + iQ$ est holomorphe et différente de zéro aux environs de $s$, et prend sur $s$ des valeurs telles que $Px' + Qy' = 0$.

Cette fonction est holomorphe dans tout l'espace S, car $P + iQ = \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}$, et $\varphi'(z)$ ne s'annule pas dans S; $P + iQ$ s'annule pour la valeur $z_0$ qui annule $\varphi(z)$, valeur qu'on peut toujours supposer être o. Dans le voisinage de $z = 0$, $P + iQ$ est de la forme $z(1 + zA)$, car le résidu de $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$, relatif au pôle $z = 0$, est égal à $+1$.

Considérons alors les courbes C normales, en chacun de leurs points $z$, à la droite $z - a$. Elles vérifient l'équation différentielle $P\,dx + Q\,dy = 0$, qui a pour intégrale générale $U = R$. Pour des valeurs de $R < R_1$, ces courbes sont fermées, sans points communs, intérieures à $s$ et tendent vers $s$ quand R tend vers $R_1$; elles entourent le point $z = 0$ pour lequel $\varphi(z)$ s'annule. Je dis, de plus, que ces courbes sont convexes et n'ont qu'un contact simple avec leurs tangentes. En effet, soit $\Omega$ l'angle que fait avec $Ox$ la normale en M à l'une des courbes C. Il suffit de prouver que $\frac{d\Omega}{d\theta}$ garde un signe constant et ne s'annule pas quand M parcourt la courbe C. Par hypothèse, sur $s$, $\frac{d\Omega}{d\theta}$ est toujours positif; désignons par $x = f(\theta, R)$, $y = f_1(\theta, R)$, les coordonnées d'un point de C (C correspondant à la valeur R), $f$ et $f_1$ sont des fonctions continues de $\theta$ et de R :

$$\frac{d\Omega}{d\theta} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{dy}{d\theta} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}x' + \frac{\partial\Omega}{\partial y}y'.$$

On sait que

$$\frac{x'}{y'} = -\frac{Q}{P} \quad \text{et, d'autre part,} \quad \frac{y}{x} = \text{tang}\,\theta.$$

On déduit de là que

$$x' = -Q\lambda(\theta, R), \qquad y' = P\lambda(\theta, R),$$

$\lambda$ étant une fonction de $\theta$ et R (ou de $x$ et $y$) égale à $\frac{x^2 + y^2}{Px + Qy}$; $\lambda$ est une fonction continue qui ne s'annule pas dans S, et qui, par suite, garde un signe constant; en effet,

$$\frac{1}{\lambda} = \mu(x, y) = \frac{Px + Qy}{x^2 + y^2};$$

$\mu(xy)$ est la partie réelle du produit $(P+iQ)\frac{1}{z}$ (holomorphe dans S, puisque $P+iQ$ s'annule pour $z=0$); c'est donc une fonction qui satisfait à l'équation $\Delta\mu=0$, régulière dans S, et prenant sur $s$ une suite continue de valeurs dont le signe est constant; autrement, $Px+Qy$ s'annulerait sur $s$, et une tangente à la courbe $s$ passerait par l'origine O, ce qui est impossible. Comme la fonction $\lambda$ est égale à 1 pour $z=0$, elle est toujours positive. On voit ainsi que

$$\frac{d\Omega}{d\theta}=\lambda\left(-Q\frac{\partial\Omega}{\partial x}+P\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right);$$

mais

$$\Omega=\text{arc tang}\frac{-x'}{y'}=\text{arc tang}\frac{Q}{P},$$

par suite

$$i\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\frac{\partial\Omega}{\partial y}=\frac{d}{dz}L(P+iQ)=\frac{\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial P}{\partial x}}{P+iQ}$$

et

$$\frac{d\Omega}{d\theta}=\lambda P'_x=\frac{(x^2+y^2)P'_x}{Px+Qy}.$$

$P'_x$ est une fonction qui satisfait à l'équation $\Delta P'_x=0$, et prend sur $s$ des valeurs $\frac{d\Omega}{d\theta}\frac{1}{\lambda}$, toutes positives. Comme elle est régulière dans S, elle est constamment positive dans cet espace; $\frac{d\Omega}{d\theta}$ est donc toujours plus grand que 0 sur une courbe C.

En dernier lieu, les cercles décrits de $a$ comme centres et passant par $z$, comprennent-ils à leur intérieur la courbe C qui passe par ce point $z$? Soit $C_1$ une des courbes C; traçons un cercle qui lui soit tangent et dont le centre soit du côté du centre de courbure de $C_1$. Ce cercle entoure $C_1$ si son rayon $r$ est supérieur à la fois à $d$ et à $\frac{m^2d^2+1}{2m}$, $d$ étant la distance maxima de deux tangentes parallèles de $C_1$, et $2m$ le minimum sur la courbe de l'expression $\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$, c'est-à-dire de la courbure de $C_1$ (ou une quantité inférieure à ce minimum). D'autre part, d'après ce qui précède,

$$\frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{P'_x}{\sqrt{P^2+Q^2}}.$$



Soit B la plus petite valeur de $P'_x$ sur $s$; dans l'aire S, $P'(x)$ est au moins égale à B; soit $b$ le maximum de $\sqrt{P^2+Q^2}$ sur $s$, et D la distance maxima de deux tangentes parallèles de la courbe $s$.

Il suffit que $r$ soit supérieur à la fois à D et à $\frac{D^2B^2+4b^2}{4bB}$. Cette dernière quantité garde la même valeur quand on multiplie $P+iQ$ par une constante K.

Ce point établi, on peut toujours (sans que rien soit modifié dans les raisonnements précédents) multiplier la fonction $P+iQ$ par un nombre réel et positif $k$, assez grand pour que ($\mu$ désignant le module minimum de $P+iQ$ entre $C_1$ et $s$), $\mu k$ soit supérieur à D et à $\frac{D^2b^2+4b^2}{4bB}$. La fonction $k(P+iQ)$ remplit dès lors toutes les conditions exigées : les courbes C, comprises entre $C_1$ et $s$, sont intérieures aux cercles qui passent par un point $z$ de ces courbes et qui ont $a$ pour centre; car le point $a=z-kP-ikQ$ est sur la normale en $z$ à la courbe C, et à une distance de $z$ supérieure à $r$, du côté du centre de courbure $x_1, y_1$, puisque

$$x_1 = x - y'\frac{d\theta}{d\omega} = x - hP, \qquad y_1 = y + x'\frac{d\theta}{d\omega} = y - hQ,$$

$h$ étant positif. Il est même aisé de voir que l'on peut prendre $k$ assez grand pour que cette condition soit remplie pour toutes les courbes C (si voisines qu'elles soient de l'origine).

On pouvait choisir au lieu de $\varphi(z)$ une fonction $P(z)$ (dont la partie réelle fût constante sur $s$), et présentant dans S des singularités quelconques. Le raisonnement précédent s'applique aussi bien.

*Cas où la courbe s est quelconque.* — Lorsque la courbe convexe $s$ vérifie seulement les conditions énoncées, la démonstration est plus délicate. Nous prouverons, en premier lieu, qu'il existe une fonction $P+iQ$, holomorphe dans $s$, et prenant sur $s$ une suite continue de valeurs telles que

$$Px' + Qy' = 0.$$

Soit, en effet,

$$\Omega = \text{arc tang}\,\frac{Q}{P}\left(= \text{arc tang}\,\frac{-x'}{y'} = F(\theta) \quad \text{sur } s\right).$$

$F(\theta)$ croît de $2\pi$ en même temps que $\theta$. Posons

$$\Omega' = \Omega - \theta = G(\theta) \quad \text{sur } s.$$

On sait qu'il existe une fonction $\Omega'$, régulière dans S, satisfaisant à l'équation $\Delta\Omega' = 0$, et prenant sur $s$ la suite continue de valeurs $G(\theta)$. Désignons par R la fonction conjuguée de $\Omega'$,

$$L(P + iQ) = -R + i\Omega' + Lz,$$
$$P + iQ = ze^{-R+i\Omega'}.$$

Il suffit d'établir que R prend sur $s$ une suite continue de valeurs.

Soit $z_1 = x_1 + iy_1$ une des fonctions de $z$ qui représentent d'une manière conforme l'espace S sur un cercle C, ayant l'origine pour centre et de rayon 1; $R(x, y)$ devient une fonction $R_1(x_1, y_1)$ quand on remplace $x$ et $y$ en fonction de $x_1, y_1$; $R_1(x_1, y_1)$ est régulière dans C et satisfait à l'équation $\Delta R_1 = 0$.

A chaque point $z$ de $s$ correspond un point $z_1$ de la circonférence C, et réciproquement; $\theta$ est une fonction continue de $\varphi$ qui croît constamment avec $\varphi$ et augmente de $2\pi$ en même temps que $\varphi$ ($\varphi$ désigne l'angle que fait avec $Ox_1$ la droite qui joint O à $z_1$); $G(\theta)$ est une fonction continue de $\varphi$, $G_1(\varphi)$. A une constante réelle près, $R_1(x_1, y_1)$ est donnée par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{G_1(\varphi+\psi) - G_1(\varphi)}{1 + a^2 - 2a\cos\psi}\sin\psi\,d\psi$$

($a$ et $\varphi$ sont les coordonnées polaires d'un point $z_1$). Remarquons que

$$G(\theta + \Delta\theta) - G(\theta) = \Delta\theta[G'(\theta) + \varepsilon],$$

$\varepsilon$ tend vers o avec $\Delta\theta$, et, quand $G'(\theta)$ est continue entre o et $2\pi$ (ce qui est l'hypothèse), on peut trouver un nombre $\Delta_1$ assez petit pour que, $|\Delta\theta|$ étant inférieur à $\Delta_1$, $|\varepsilon|$ soit inférieur à un nombre $\eta$, qu'on peut prendre aussi petit qu'on veut, et cela pour toute valeur de $\theta$ entre o et $2\pi$.

Il s'ensuit qu'on peut trouver $\delta$ assez petit, pour que, $|\psi|$ étant plus petit que $\delta$,

$$G_1(\varphi+\psi) - G_1(\varphi) = [\theta(\varphi+\psi) - \theta(\varphi)][G'(\theta) + \varepsilon],$$

$|\varepsilon|$ étant inférieur à $\eta$, quelle que soit la valeur de $\varphi$ entre o et $2\pi$. [Dans $G'(\theta)$, $\theta$ représente la valeur de $\theta$ correspondant à $\varphi$.]

On aura donc

$$\begin{aligned}2\pi R_1(x_1, y_1) = 2\pi R_1(a, \varphi) = &\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{G_1(\varphi+\psi) - G_1(\varphi)}{1 + a^2 - 2a\cos\psi}\sin\psi\,d\psi \\ &+ \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{\theta(\varphi+\psi) - \theta(\varphi)}{1 + a^2 - 2a\cos\psi}[G'(\theta) + \varepsilon]\sin\psi\,d\psi \\ = &\,K(a, \varphi) + J(a, \varphi).\end{aligned}$$

On peut trouver un nombre $a_1$ assez voisin de l'unité pour que, $a$ étant compris entre 1 et $a_1$, on ait

$$|K(a, \varphi) - K(1, \varphi)| < \frac{\sigma}{2},$$

quel que soit $\varphi$.

Considérons $J(a, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} J(a, \varphi) &= G'(\theta) \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{\theta(\varphi + \psi) - \theta(\varphi)}{1 + a^2 - 2a\cos\psi} \sin\psi \, d\psi + \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{\theta(\varphi + \psi) - \theta(\varphi)}{1 + a^2 - 2a\cos\psi} \varepsilon \, d\psi \\ &= G'(\theta) J_1(a, \varphi) + J_2(a, \varphi). \end{aligned}$$

Admettons, pour un instant, qu'il existe un nombre $a'_1$ assez voisin de 1 pour que, $a'$ et $a''$ étant compris entre $a'_1$ et 1, on ait, quel que soit $\varphi$,

$$|J_1(a', \varphi) - J_1(a'', \varphi)| < \eta.$$

Remarquons que la différence $\theta(\varphi + \psi) - \theta(\varphi)$ a le signe de $\psi$; par suite, dans l'intégrale $J_1$, tous les éléments sont positifs; $J_2$ s'obtient en multipliant tous ces éléments par une quantité $\varepsilon$ de module inférieur à $\eta$; par suite,

$$J_2 = \alpha J_1,$$

$|\alpha|$ étant inférieur à $\eta$, et la différence

$$J(a', \varphi) - J(a'', \varphi) = G'(\theta)[J_1(a', \varphi) - J_1(a'', \varphi)] + \alpha' J_1(a', \varphi) - \alpha'' J_1(a'', \varphi)$$

($|\alpha'|$ et $|\alpha''|$ sont inférieurs à $\eta$). Soient M le module maximum de $G'(\theta)$, quand $\theta$ varie de 0 à $2\pi$; $m$ la valeur maxima de $J_1(a, \varphi)$. Si $a'$ et $a''$ sont compris entre 1 et $a'_1$, on a

$$|J(a', \varphi) - J(a'', \varphi)| < \eta(M + 2m).$$

M est indépendant de $\delta$, $m$ décroît avec $\delta$, par suite, avec $\eta$. On peut donc choisir $\eta$ assez petit pour que

$$\eta(M + m) \quad \text{soit inférieur à } \frac{\sigma}{2}.$$

En définitive, il existe un nombre A assez voisin de 1 pour que, $a'$ et $a''$ étant compris entre 1 et A, on ait

$$|R_1(a', \varphi) - R_1(a'', \varphi)| < \sigma,$$

quel que soit $\varphi$ ($\sigma$ étant un nombre donné, aussi petit qu'on veut).

Mais ceci suppose l'existence du nombre $a'_1$. Tout revient donc à démontrer que l'expression

$$J_1(a,\varphi)=\int_{-\delta}^{+\delta}\frac{\theta(\varphi+\psi)-\theta(\varphi)}{1+a^2-2a\cos\psi}\sin\psi\,d\psi$$

tend uniformément vers une limite le long de $c$, quand $a$ tend vers 1.

Pour cela, considérons encore la fonction $z_1$ de $z$, dont nous venons de faire usage, et soit $z=\varphi_1(z_1)$ la fonction inverse. Prenons un point M sur $s$, et désignons par $u+iv$ une fonction de $z$ holomorphe dans le plan; $u(x,y)$ prend sur $s$ une suite continue de valeurs $g(\theta)$,

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}x'_\theta+\frac{\partial u}{\partial y}y'_\theta,$$

$x'_\theta$ et $y'_\theta$ sont des fonctions continues de $s$ qui ne s'annulent à la fois pour aucun point de $s$, et l'on peut toujours choisir $u$ de telle sorte que $\frac{du}{d\theta}$ ne soit pas nul au point M. Par suite, dans un certain intervalle $a\text{M}b$ de $s$, le module de $\frac{du}{d\theta}$ [ou de $g'(\theta)$] est supérieur à un nombre $\mu$. Si l'on remplace $z$ en fonction de $z_1$, $u+iv$ devient une fonction $u_1+iv_1$ de $z_1$, holomorphe dans le cercle C, et $g(\theta)$ une fonction continue de $\varphi$, $g_1(\varphi)$.

Ceci posé, on voit, comme plus haut, qu'il existe un nombre $\delta_1$ assez petit pour que, $|\psi|$ étant inférieur à $\delta_1$,

$$g_1(\varphi+\psi)-g_1(\varphi)=[\theta(\varphi+\psi)-\theta(\varphi)][g'(\theta)+\varepsilon],$$

$|\varepsilon|$ étant inférieur à $\eta$, quel que soit $\varphi$. [Dans $g'(\theta)$, $\theta$ désigne la valeur de $\theta$ qui correspond à $\varphi$.] Si $\delta_1$ est inférieur à $\delta$, on remplace $\delta$ par $\delta_1$ dans le premier raisonnement, qui subsiste *a fortiori*. Sinon, on garde $\delta$ comme intervalle. Dans tous les cas ($\delta$ représentant la même valeur que dans la première partie de la démonstration), on a

$$\begin{aligned}2\pi V_1(x_1,y_1)=2\pi V_1(a,\varphi)=&\int_\delta^{2\pi-\delta}\frac{g_1(\varphi+\psi)-g_1(\varphi)}{1+a^2-2a\cos\psi}\sin\psi\,d\psi\\&+\int_{-\delta}^{+\delta}\frac{\theta(\varphi+\psi)-\theta(\varphi)}{1+a^2-2a\cos\psi}[G'(\theta)+\varepsilon]\sin\psi\,d\psi\\&=k(a,\varphi)+j(a,\varphi).\end{aligned}$$

Mais on peut trouver un nombre $a_1$ assez voisin de 1 pour que, $a$ étant

compris entre $a_1$ et 1, on ait

$$2\pi\,|\,c_1(a,\varphi)-c_1(1,\varphi)\,|<\eta.$$

De même, il existe un nombre $b_1$ tel que, $a$ étant compris entre $b_1$ et 1, on ait

$$|\,k(a,\varphi)-k(1,\varphi)\,|<\eta.$$

Il en résulte qu'on peut trouver un nombre A assez voisin de 1 pour que, $a'$ et $a''$ étant compris entre A et 1, on ait

$$|j(a',\varphi)-j(a'',\varphi)\,|<4\eta.$$

Mais on voit, comme plus haut, que

$$j(a',\varphi)-j(a'',\varphi)=g'(\theta)[\mathrm{J}_1(a',\varphi)-\mathrm{J}_1(a'',\varphi)]+\beta'\mathrm{J}_1(a',\varphi)-\beta''\mathrm{J}_1(a'',\varphi),$$

($|\beta'|$ et $|\beta''|$ étant inférieurs à $\eta$).

Ne faisons varier $\varphi$ qu'entre les limites $\varphi_0$ et $\varphi_1$ qui correspondent aux extrémités de l'arc $a_1\mathrm{M}_1b_1$ (corrélatif de $a\mathrm{M}b$). Dans cet intervalle, $|g'(\theta)|$ est supérieur à $\mu$. L'égalité qui précède montre d'abord que $\mathrm{J}_1(a,\varphi)$ ne croît pas au delà de toute limite quand $a$ tend vers 1. Sinon, $a'$ restant fixe, $a''$ tendant vers 1, le second membre croîtrait indéfiniment. Soit donc $\nu$ une limite supérieure des valeurs de $\mathrm{J}_1(a,\varphi)$ quand $a$ prend toutes les valeurs de A à 1 ($\varphi$ variant entre $\varphi_0$ et $\varphi_1$) : $|\mathrm{J}(a',\varphi)-\mathrm{J}(a'',\varphi)|$ est inférieur à $\dfrac{\eta(4+2\nu)}{\mu}$, quel que soit $\varphi$ entre $\varphi_0$ et $\varphi_1$. Comme $\mu$ est indépendant de $\delta$, et que $\varepsilon$ tend vers 0 avec $\delta$, et par suite avec $\eta$, on peut choisir $\eta$ assez petit pour que $\dfrac{\eta(4+2\nu)}{\mu}$ soit inférieur à $\sigma$. Le raisonnement pouvant se répéter pour un arc $a\mathrm{M}b$ quelconque, il existe un nombre $a'_1$ assez voisin de 1 pour que, $a'$ et $a''$ étant compris entre 1 et $a'_1$, on ait, quel que soit $\varphi$ entre 0 et $2\pi$,

$$|\mathrm{J}_1(a',\varphi)-\mathrm{J}_1(a'',\varphi)|<\eta.$$

En conséquence, la fonction $\mathrm{R}_1(a,\varphi)$ tend vers une limite $\mathrm{R}_1(1,\varphi)$ quand $a$ tend vers 1, et cela uniformément le long de $c$. D'après le lemme I du Chapitre II (de la première Partie), $\mathrm{R}_1(1,\varphi)$ est fonction continue de $\varphi$; la fonction $\mathrm{R}(x,y)$, et par suite $\mathrm{P}+i\mathrm{Q}$, *prend donc sur s une suite continue de valeurs vérifiant la condition*

$$\mathrm{P}x'+\mathrm{Q}y'=0.$$

De plus, P et Q ne s'annulent pas à la fois sur $s$; sinon $R(x, y)$, égale à $-L\sqrt{P^2+Q^2}+L\rho$, deviendrait infinie en un point du contour $s$.

Posons

$$P_1 + iQ_1 = \frac{1}{P+iQ} = h(z).$$

Le long de $s$, $P_1 + iQ_1$ est continue, et $P_1\,dx - Q_1\,dy = 0$. De plus, $P + iQ$ étant holomorphe dans S et ne s'annulant que pour $z = 0$,

$$P_1 + iQ_1 = \frac{\alpha + i\beta}{z} + H(z)$$

[ $H(z)$ est holomorphe dans S]. Considérons l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} P_1\,dx - Q_1\,dy = U(x, y);$$

elle est indépendante du chemin suivi entre $(x_0, y_0)$ et $(x, y)$, pourvu que deux chemins différents ne comprennent pas l'origine. Elle est de la forme

$$\alpha L\rho - \beta\theta + u(x, y)$$

[ $u(x, y)$ étant régulière dans $s$]. D'après le lemme III du Chapitre II, si $(x_0, y_0)$, et $(x, y)$ sont deux points de $s$, et $l$ un chemin qui les joint à l'intérieur de $s$, les deux intégrales $\int_{x_0, y_0}^{x, y} P_1\,dx - Q_1\,dy$ prises, l'une sur le chemin $l$, l'autre sur $s$, sont égales. Comme on a $P_1\,dx - Q_1\,dy = 0$ sur $s$, U prend sur $s$ une valeur constante. L'intégrale $\int_s P_1\,dx - Q_1\,dy$ est donc nulle, et comme, d'autre part, elle est égale à $-2\pi\beta$, on voit que $\beta = 0$. Multiplions enfin $P + iQ$ par $\alpha$, $U(x, y)$ est divisée par $\alpha$, et prend la forme

$$L\rho + u(x, y);$$

sur $s$, $U(x, y)$ est constante et égale à $R_1$. Comparons cette fonction au logarithme népérien de $|\varphi(z)|$, $\varphi(z)$ étant une des fonctions qui représentent d'une manière conforme l'espace S sur un cercle de centre O et de rayon $e^{R_1}$, et qui de plus s'annulent à l'origine. La différence

$$L|\varphi(z)| - U(x, y)$$

est une fonction $U_1(x, y)$, régulière dans S, satisfaisant à $\Delta U_1 = 0$, et s'annulant sur $s$; elle est donc identiquement nulle.

Ce point établi, on voit, comme dans le cas où $s$ est analytique, que les courbes C ou $U = R$ (R étant inférieur à $R_1$) sont des courbes fermées, sans points communs, entourant l'origine, et normales en chacun de leurs points $z$ à la droite $z - a$ ($z - a = P + iQ$); ces courbes tendent vers $s$ quand R tend vers $R_1$.

Il faut prouver de plus qu'elles sont *convexes et n'ont qu'un contact simple avec leurs tangentes*. On démontre, ainsi que dans le premier cas, que, pour une courbe $C[x = f(\theta, R), y = f_1(\theta, R)]$,

$$\frac{d\Omega}{d\theta} = \lambda\left(-\frac{\partial\Omega}{\partial x} Q + P\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)$$

$\left[\Omega = \operatorname{arctang}\frac{Q}{P} = \operatorname{arctang} - \frac{x'}{y'}, \text{ et } \lambda(R, \theta) = \frac{x^2 + y^2}{Px + Qy}\right]$. P, Q, $\lambda$ sont des fonctions de $x$ et $y$ (ou de $\theta$ et $\lambda$) continues dans S et sur $s$; $\lambda$ est plus grand que zéro dans l'aire S et sur $s$; $\frac{d\Omega}{d\theta}$ est également positif en tout point de $s$. Il suffit de prouver que l'expression $\left(-Q\frac{\partial\Omega}{\partial x} + P\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)$ tend vers $\frac{d\Omega}{d\theta}\frac{1}{\lambda_1(\theta_1)}$, quand $(x, y)$ tend vers un point $(\xi, \eta)$ de $s$, $\left[\frac{d\Omega}{d\theta}, \lambda_1(\theta_1)\right.$ et $\theta_1$ étant les valeurs de $\frac{d\Omega}{d\theta}$, $\lambda$ et $\theta$ au point $\left.(\xi, \eta)\right]$; le raisonnement s'achèvera dès lors comme précédemment.

Envisageons donc l'expression

$$\left(-Q\frac{\partial\Omega}{\partial x} + P\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right).$$

Posons

$$p = -\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial\Omega}{\partial y},$$

et cherchons directement s'il existe une fonction $p + iq$ de $z$ telle que $qP + pQ$ tende vers la valeur $\frac{F'(\theta)}{\lambda_1(\theta)}$ quand $(x, y)$ tend vers le point de $s$ qui correspond à la valeur $\theta$. Par hypothèse, $F'(\theta)$ est continue et admet la période $2\pi$; on sait qu'il en est de même de $\lambda_1(\theta)$. Il existe donc une fonction $W(x, y)$ qui prend sur $s$ la suite de valeurs $\frac{F'(\theta)}{\lambda_1(\theta)}$, régulière dans S et satisfaisant à l'équation $\Delta W = 0$; considérons la fonction de $z$, $w + iW$, et soit $p + iq = \frac{w + iW}{P + iQ}$ : la fonction $p + iq$ répond à la condition énoncée. Cette

fonction est holomorphe dans S, sauf au point $z = 0$, qui est un pôle du premier ordre;

$$p + iq = \frac{\alpha + \beta i}{z} + k(z)$$

($\beta$ étant holomorphe dans S), $\alpha + i\beta$ est la valeur de $w + iW$ pour $z = 0$, et contient une constante réelle arbitraire ($w = w_1 + C$), que l'on détermine par la condition que $w$ soit nul pour $z = 0$. Alors

$$p + iq = \frac{i\beta}{z} + k(z).$$

Soit

$$\omega(x, y) = -\int_{x_0, y_0}^{x, y} p\,dx - q\,dy.$$

D'après le lemme III du Chapitre II, si $(x_0, y_0)$ et $(x, y)$ sont deux points de $s$,

$$\omega(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} p\,dx - q\,dy,$$

l'intégrale étant prise le long de $s$.

Mais, le long de $s$,

$$p\,dx + q\,dy = F'(\theta)\,d\theta:$$

donc

$$\omega(x, y) = F(\theta) + C.$$

D'autre part, $\omega(x, y)$ est de la forme $\beta\theta + k_1(x, y)$, la fonction $k_1$ étant régulière dans S. Quand $\theta$ varie de $2\pi$, $F(\theta)$ augmente de $2\pi$, par suite $\beta = 1$. Ceci posé, faisons $C = 0$, et comparons les deux fonctions $\omega$ et $\Omega$ de $x, y$. La différence $D(x, y) = \omega(x, y) - \Omega(x, y)$ est uniforme et régulière dans S où elle satisfait à l'équation $\Delta D = 0$; elle s'annule sur le contour $s$. Elle est donc identiquement nulle. L'expression $\frac{\partial \Omega}{\partial x} x'_\theta + \frac{\partial \Omega}{\partial y} y'_\theta$ relative à une courbe C tend bien vers $F'(\theta)$ quand C tend vers $s$.

L'existence de la fonction $P + iQ$ est donc établie en toute rigueur pour toute courbe $s$ pour laquelle $\frac{d^2 z}{dt^2}$ est continue, et qui n'a en chaque point qu'un contact simple avec sa tangente (1).

(1) Il résulte de ce qui précède que, pour toute courbe $s$ vérifiant les conditions précédentes, la fonction $z_1 = \varphi(z)$ qui représente S sur C admet une dérivée $\varphi'(z)$ qui prend sur

*Cas où la courbe s présente des points singuliers.* — Si la courbe $s$ présente des points $A_i$ où les dérivées premières ou secondes de $x$ et $y$ sont discontinues (sans devenir infinies ou indéterminées), par exemple si $s$ présente des points anguleux, le développement en série de polynômes est

---

$s$ une suite continue de valeurs $\varphi'(z')$ et jouit, par suite, des propriétés énoncées au lemme III du Chapitre II : quand $z$ tend vers un point $z'$ de $s$, à l'intérieur de $s$ ou sur $s$, $\varphi'(z') = \lim \frac{\varphi(z) - \varphi(z')}{z - z'}$; quand $\frac{d^2 z}{dl^2}$ existe et est continue, $\varphi''(z)$ existe aussi sur $s$. On déduit de là plusieurs conséquences : tout d'abord, soit un segment de courbe AB qui jouit de la propriété énoncée $\left(\frac{d^2 z}{dl^2} \text{ est continue}\right)$; si une fonction $f(z)$ prend sur AB des valeurs $f_1(l)$ admettant une dérivée continue $\frac{df_1}{dl}$, $f'(z)$ *prend sur* AB *les valeurs* $\frac{df_1}{dl}\frac{1}{\frac{dz}{dl}}$. A l'aide de la représentation conforme, on ramène ce cas général au cas où AB est un cercle de rayon 1, dans lequel $f(z)$ est holomorphe. Soit $f(z) = U + iV$, $f_1(\varphi) = u(\varphi) + iv(\varphi)$; si $\frac{df}{dz}$ existe sur $s$, on doit avoir

$$\frac{\partial U}{\partial x}\sin\varphi - \frac{\partial U}{\partial y}\cos\varphi = -u'(\varphi),$$
$$\frac{\partial V}{\partial x}\sin\varphi - \frac{\partial V}{\partial y}\cos\varphi = -v'(\varphi).$$

Il existe une fonction $U_1(x, y)$ régulière dans C, satisfaisant à $\Delta U_1 = 0$ et prenant sur C les valeurs $-u'(\varphi)$. Posons

$$F_1(z) = P + iQ = \frac{U_2 + iU_1}{z},$$

$-U_2$ étant la fonction conjuguée de $U_1$, dont on détermine la constante, en sorte que $U_2 + iU_1$ s'annule pour $z = 0$, ce qui est possible, car $U_1(x, y) = 0$ pour $z = 0$, puisque $\int_0^{2\pi} u'(\varphi)d\varphi = 0$. Pour une valeur convenable de la constante, $\int P\,dx - Q\,dy$ prend sur $c$ les valeurs $u(\varphi)$, et par suite coïncide avec U; ainsi $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = -\frac{\partial U}{\partial y}$, et l'on a

$$\frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U_2 + iU_1}{z},$$

$U_2$ étant continue sur $s$. De même, en raisonnant sur $V(x, y)$ comme sur U, on voit que

$$\frac{\partial V}{\partial y} + i\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{V_2 + iV_1}{z},$$

$V_2$ étant continue sur $c$. Donc $\frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y}$ ou $f'(z)$ est continue sur $c$. Le théorème est démontré.

Ajoutons que si une fonction $V(x, y)$ et sa dérivée $\frac{\partial V}{\partial x}$ ou $\frac{dV}{dy}$ prennent sur AB des va-

encore possible, pourvu qu'à chaque point $A_i$ corresponde un chemin $mA_i$ dans S, le long duquel $\int \frac{F(z)}{z-x}\,dz$ tende vers une limite ($x$ désignant un point de S). Nous verrons en effet plus loin que la fonction $F(x)$ peut se décomposer alors en une somme de fonctions, holomorphes respectivement à l'extérieur de lignes $A_1A_2$, $A_2A_3$, .... La première se développera en séries de polynômes à l'intérieur d'une courbe convexe ordinaire $A_1A_2MA_1$ entourant S, et ainsi des autres.

Il suffit même qu'il existe une série de polynômes $f(z)$, convergente dans S, et telle que la différence $F(z)-f(z)$ réponde à la condition énoncée. Ceci est toujours possible quand la fonction F admet les $A_1, A_2, \ldots, A_n$ comme points singuliers isolés. Plus généralement, nous indiquerons dans le Chapitre II d'autres cas où l'on peut décomposer la coupure $s$ en coupures partielles $A_1A_2$, ....

Si, en plusieurs points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, la courbe a un contact d'ordre supérieur avec sa tangente, $F(z)$ *étant continue* sur $s$ aux environs de ces points, on décompose l'intégrale en deux parties $\int_\sigma$ et $\int_{s-\sigma}$, $\sigma$ désignant un fragment de $s$ qui comprend tous les points $A_n$, et qu'on peut prendre aussi petit qu'on veut; en faisant tendre $\sigma$ vers o, on voit que le développement subsiste.

Au cas contraire (et ceci s'applique aussi bien quand $s$ n'est pas convexe), s'il existe un point $a$ tel qu'en posant $z_1 = \frac{1}{z-a}$ la fonction $F_1(x_1) = F(x)$ soit holomorphe dans l'aire $S_1$ convexe, et dont le contour $s_1$ n'a pas de singularité, $F(x)$ se met sous la forme $\sum P_n\left(\frac{1}{x-a}\right)$. Le point $a$ existe toujours, quand il n'y a sur $s$ que deux points $A_1$, $A_2$.

Lorsque $s$ est une courbe quelconque, on peut toujours la décomposer en parties $A_1A_2$ assez petites, soit pour que les tangentes en chaque point M

---

leurs $V_1(l)$, $V'_1(l)$, admettant une dérivée première continue, il en est de même des deux dérivées partielles.

Quand, le long de AB, $\frac{d^2z}{dl^2}$ existe et est continu, si $V(x,y)$ prend sur AB des valeurs $V(l)$ ayant une dérivée première continue, la fonction conjuguée est continue sur AB. Si, le long du même arc AB, $V(x,y)$ prend des valeurs $V_1(l)$ admettant une dérivée seconde, $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$ sont continues sur AB. Ces propositions sont utiles dans l'intégration de l'équation à deux variables $\Delta V = 0$.

de $A_1 A_2$ soient ordinaires et extérieures à S, soit pour que les cercles tangents à $s$ en chaque point M et passant par un certain point $\alpha$ (extérieur à S) soient extérieurs à S. Si l'on peut choisir les points $A_1, A_2, \ldots$, en sorte qu'à chacun d'eux corresponde un chemin $A_1 m_1, A_2 m_2, \ldots$, sur lequel $\int \frac{F(z)}{z-x} dz$ tende vers une limite, la fonction $F(x)$ se développe dans S sous la forme (4).

*Discussion du développement* (2). — La possibilité du développement (2) s'établit comme celle du développement (3), avec quelques simplifications.

Soit $s$ un contour fermé quelconque (sans angle rentrant) tel que, pour chaque point de $s$, $\frac{d^2 z}{dt^2}$ existe et soit continu. Le contour peut offrir des tangentes d'inflexion. On établit qu'il existe une fonction $P + iQ$, holomorphe dans S et continue sur $s$, telle que le long de $s$

$$Px' + Qy' = 0.$$

On peut toujours la multiplier par un nombre réel K assez petit en valeur absolue pour que les cercles ayant $a$ pour centre et passant par $z$ ($z - a = P + iQ$) soient extérieurs à la courbe C passant par $z$ ($z$ étant voisin de $s$). On en conclut que l'intégrale $\int_C \frac{(z-a)^n F(z)}{(x-a)^{n+1}} dz$ est indépendante de C quand C tend vers $s$; ce qui montre que le développement, trouvé pour C, converge dans S.

Si $s$ présente des points singuliers $A_1, A_2, \ldots$, le développement est encore possible, pourvu que la coupure $s$ puisse se décomposer en coupures partielles, $A_1 A_2, \ldots$.

Le cas où S est l'espace extérieur à une ligne non fermée se ramène aux précédents à l'aide de la transformation

$$z_1 = z + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(z-a)(z-b)}.$$

Les développements dans une aire limitée par des arcs de cercle $s$ ou extérieure à un contour rectiligne sont des cas particuliers des développements (2), (3) et (4). Ils s'appliquent à toute fonction discontinue sur $s$, mais remplissant aux points anguleux les conditions indiquées.

5. *Calcul des coefficients du développement* (3). — Revenons au cas d'une aire convexe régulière S. Nous avons démontré qu'à toute courbe $s$

correspond une fonction

$$a(z) = -\psi(z) = z - (P + iQ)$$

holomorphe dans S, s'annulant pour $z = 0$, et telle que

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_\sigma \frac{(x+\psi)^n F(z)}{(z+\psi)^{n+1}} dz = \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n(x).$$

La fonction $z + \psi$ n'a dans $s$ qu'un zéro simple, $z = 0$; $\sigma$ est une courbe quelconque entourant l'origine et intérieure à $s$. Chaque terme du second membre a une valeur indépendante de $\sigma$, valeur qui, pour le terme de rang $n$, n'est autre chose que le résidu relatif au pôle $z = 0$ de l'expression

$$\frac{(x+\psi)^n F(z)}{(z+\psi)^{n+1}}.$$

Posons

$$\psi = zf(z) = z(\alpha + zA)$$

($\alpha$ est réel et positif, comme nous l'avons vu).

D'après une formule connue, le résidu est égal à

$$\frac{1}{1.2\ldots n} D^n_{z=0} \left(\frac{x+zf}{1+f}\right)^n \frac{F}{1+f}.$$

Ceci montre que $P_n(x)$ s'exprime en fonction des valeurs pour $z = 0$ des $n$ premières dérivées de $f(z)$ et de $F(z)$. Si donc on connaît la fonction $f(z)$, les coefficients pourront se calculer non plus à l'aide d'intégrales définies, *mais en fonction de* $F(0)$, $F'(0)$, $\ldots$, $F_n(0)$.

Mettons ces dérivées en évidence dans l'expression de $P_n(x)$ :

$$n!\,P_n(x) = D^n_{z=0} \left(\frac{x+zf}{1+f}\right)^n \frac{F}{1+f}.$$

Soient

$$\frac{x+zf}{1+f} = u, \qquad \left(\frac{x+zf}{1+f}\right)^n \frac{1}{1+f} = V, \qquad \frac{1}{1+f} = g.$$

On a

$$n!\,P_n(x) = D^n_{z=0} VF = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{n\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} F_{n+p}(0)\, V_p = (V+F)^{(n)}_{z=0}.$$

L'expression

$$V_p = D^p_{z=0}\, g u^n$$

est indépendante de F

$$(\alpha) \qquad V_p = \sum_{q=0}^{q=p} \frac{p \ldots (p-q+1)}{1.2 \ldots q} g_{p-q}(0) u_q^n = (u^n + g)_{z=0}^{p}.$$

La quantité $u_q^n$ est la valeur pour $z = 0$ de $D_z^q u^n$,

$$u_q^n = D_{z=0}^q [gx + z(1-g)]^n.$$

C'est donc un polynôme en $x$ de degré $n$, de la forme $x^{n-q}(b + x\mathrm{B})$ et dont les coefficients s'expriment en fonction de $u(0)$, $u'(0)$, ..., $u_q(0)$, par suite en fonction de $g(0)$, $g'(0)$, ..., $g_q(0)$. Posons

$$\begin{aligned} g(z) &= a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots, \\ u(z) &= gx + z - zg = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots \\ &= a_0 x + z(a_1 x + 1 - a_0) + z^2(a_2 x - a_1) + \ldots + z^n(a_n x - a_{n-1}) + \ldots. \end{aligned}$$

On voit que

$$b_n = \frac{g_n(0)}{1.2 \ldots n} x - \frac{g_{n-1}(0)}{1.2 \ldots (n-1)}.$$

Ceci posé, élevons $u$ à la puissance $n$ et cherchons le coefficient $\mathrm{B}_q$ de $z^q$. D'après une formule connue,

$$\mathrm{B}_q = \sum \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_q!} b_0^{\alpha_0} b_1^{\alpha_1} \ldots a_q^{\alpha_q}.$$

Les $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q$ sont des nombres entiers positifs vérifiant les deux égalités

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_q &= n, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + q\alpha_q &= q. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$u_q^n = \frac{1}{q!} \sum \frac{n!}{\alpha_0! \ldots \alpha_q!} b_0^{\alpha_0} \ldots b_q^{\alpha_q}.$$

Telle est l'expression directe des polynômes $\mathrm{P}_n(x)$ en fonction des constantes $g_0$, $g'_0$, ..., $g_n(0)$.

On peut aussi exprimer les $u_n^q$ en fonction des polynômes d'indices inférieurs, en partant des identités

$$u_{p+1}^{n+1} = D_{z=0}^{p+1} u_{p+1}^{n+1} = (n+1) D_{z=0}^{p} u_{p+1}^{n} u',$$

ou encore

$$u_{p+1}^{n+1} = D_{z=0}^{p+1} u^n u = \sum_{q=0}^{q=p+1} \frac{(p+1)\ldots(p-q+2)}{1.2\ldots q} u_q^n u_{n+1-q}.$$

*Réciproque du théorème précédent.* — Soit une fonction arbitraire $\psi(z)$ ayant un zéro simple au point $z = a$ qu'on peut toujours supposer être l'origine. Posons $z + \psi(z) = h(z) = P + iQ$, et voyons à quelles conditions les courbes C qui satisfont à l'équation $P\,dx + Q\,dy = 0$ sont fermées et convexes dans le voisinage de l'origine. Nous avons dit que, si $U + Vi$ désigne l'intégrale $\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{h(z)}$, ces courbes satisfont à l'équation $U = R$. Comme

$$\frac{1}{h(z)} = \frac{\alpha + \beta i}{z} + H(z),$$
$$U = \alpha L\rho - \beta\theta + G(x, y).$$

Si les courbes C sont fermées, $\beta$ est nul. D'autre part, on peut toujours supposer $\alpha$ égal à 1, et

$$U(x, y) = L\rho + G(x, y) = R.$$

Posons

$$z_1 = e^{U+iV} = z e^{G+iG_1} = \varphi(z)$$

($G + iG_1$ est holomorphe dans le voisinage de l'origine). Comme

$$\frac{1}{h(z)} = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

la fonction $\varphi(z)$ est holomorphe dans toute aire S ne renfermant ni point singulier, ni zéro de $h(z)$ (en dehors du point $z = 0$), et sa dérivée $\varphi'(z)$ ne s'annule pas dans S. Par suite, la fonction inverse $z = \varphi_1(z_1)$ est holomorphe dans l'aire $S_1$ correspondant à S; S comprenant le point O, $S_1$ comprend le point $O_1$, et l'on peut toujours décrire un cercle de centre $O_1$ et intérieur à $S_1$; la courbe correspondante est une courbe fermée, entourant l'origine O et vérifiant l'équation $U = R$. Quand R a une valeur négative très grande, la courbe C se réduit sensiblement au point O; quand R croît, on obtient une famille de courbes qui ne se coupent pas et qui se ferment autour de l'origine, tant que R n'atteint pas une certaine valeur limite $\rho$.

Ces courbes sont-elles convexes? Nous avons dit qu'en un point de ces

courbes ($\Omega$ étant l'angle de la normale avec $Ox$)

$$\frac{d\Omega}{d\vartheta} = \frac{x^2+y^2}{Px+Qy} P'_x.$$

Il faut que $\frac{d\Omega}{d\vartheta}$ ne devienne ni nul, ni infini.

Considérons donc les deux courbes

$$\frac{Px+Qy}{x^2+y^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad P'_x = 0$$

$\left(\frac{Px+Qy}{x^2+y^2} = 1 + Cx + Dy\right.$, C et D étant réguliers près de l'origine$\left.\right)$; considérons aussi les points singuliers de $P+iQ$ (qui sont ceux de $P'_x$); soit R′ la plus petite valeur de R pour laquelle la branche de courbe $U = R$ qui se ferme autour de O rencontre un de ces points ou une de ces courbes (R′ est au plus égal à $\rho$). Pour toute valeur de R inférieure à R′, la courbe C est fermée et convexe, et l'on peut trouver un nombre K assez grand pour que le cercle passant par $z$ et ayant pour centre $a = z - Kh(z)$ comprenne à son intérieur la courbe C ($z$ étant un point de C). Si l'on se donne *a priori* $h_1(z) = Kh(z)$ (K est réel et plus grand que 1), on voit bien aisément que cette condition est réalisée pour les courbes C voisines de l'origine (qui correspondent à des valeurs de R inférieures à un certain maximum $R_1$).

En résumé, soit $h_1(z)$ une fonction de la forme $Kz[1 + zA(z)]$, où K est réel et supérieur à l'unité et A une fonction holomorphe près de l'origine; la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} P_n(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!} D^n_{z=0}[gx + z(1-g)]^n F(z) g(z)$$

est *convergente dans une certaine courbe* $U = R_1$, si $F(z)$ est holomorphe dans cette courbe

$$\left[g(z) = \frac{z}{h_1(z)}, \qquad U + iV = K\int_{z_0}^{z} \frac{1}{h_1(z)} dz\right]:$$

inon, elle converge dans *la première des courbes* $U = R$ *qui rencontre une discontinuité de* $F(z)$. La somme de cette série est $F(x)$. De plus, on peut disposer de K, en sorte que $R_1$ soit égal à un nombre quelconque infé-

rieur à R′ (R′ étant la valeur à partir de laquelle les courbes $U = R$ cessent d'être fermées, convexes ou régulières autour de l'origine).

*Applications.* — Pour $h_1(z) = Kz$, les courbes C sont des cercles ayant pour centre l'origine; elles sont fermées convexes et sans inflexion, quel que soit R; on voit immédiatement que c'est *la seule fonction* $h_1(z)$ qui jouisse de cette propriété.

Quand $h_1(z) = Kz(1 + az)$, les courbes C sont des cercles ayant même axe radical $\left(\text{à savoir la droite perpendiculaire au segment } OA_1 \text{ en son milieu; } A_1 \text{ a pour affixe } -\frac{1}{a}\right)$, et $R' = -L|a|$.

Si $h_1(z) = Kz(1 + az^2)$, les courbes C sont des quartiques bicirculaires qu'on peut définir par la relation géométrique $\rho^2 = C\rho'\rho''$ $\left(\rho, \rho', \rho''\right.$ étant les distances d'un point M de la courbe aux points O, A, A′; A et A′ ont pour affixes $\left.-\frac{1}{a} \text{ et } +\frac{1}{a}\right)$. En prenant $h_1(z) = Kz\sqrt{1 - c^2z^2}$, on obtient pour les courbes C des quartiques bicirculaires, inverses, par rapport à leur centre O, de coniques homofocales dont les foyers sont $\pm c$ ($c$ est réel). Dans ce cas $R' = L\,\frac{c}{1+\sqrt{2}}$; en changeant $x$ en $\frac{1}{x}$, on obtient une forme de développement pour l'aire S *extérieure à une ellipse* ayant pour foyer $\pm c$ et dont l'excentricité est inférieure à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Plus généralement, soit $\frac{1}{h_1(z)} = \frac{1}{z} + \frac{\alpha}{z-a} + \ldots + \frac{\lambda}{z-l}$, $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant réels; les courbes C sont définies par la propriété $\rho\rho_1^\alpha \ldots \rho_n^\lambda = \text{const.}$; $\rho, \rho_1, \ldots, \rho_n$ sont les distances OM, AM, ..., LM de M aux points O, $a, b, \ldots, l$. Si $\alpha = 1$ et si $\beta = \ldots = \lambda = 0$, ces courbes sont des ovales de Cassini.

Sans m'étendre davantage sur ces exemples, j'ajoute seulement que les polynômes $P_n(z)$ se rencontrent dans une série assez analogue à celle de Lagrange, et qui peut s'en déduire.

L'équation $z = \alpha x + (1 - \alpha) z f(z)$ a une racine $\zeta$ qui tend vers zéro avec $\alpha$. Appliquons la première forme de la série de Lagrange à l'équation

$$(1) \qquad G(z) = z - a - \alpha\lambda(z) = 0,$$

en faisant

$$\lambda(z) = \frac{x + zf(z)}{1 + f(z)}, \qquad \Pi(z) = \frac{F(z)}{1 + f(z)}.$$

On sait que, dans un certain champ,

$$\frac{H(\zeta)}{G'(\zeta)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n} D_a^n[\lambda^n(a) H(a)].$$

En particulier, pour $a = 0$, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad z = \alpha\lambda(z) - \alpha\frac{x + zf(z)}{1 + f(z)},$$

et le premier membre du développement prend la forme

$$\frac{H(\zeta)}{G'(\zeta)} = \frac{F(\zeta)(1+f)}{(1+f)^2 - \alpha[(1+f)(f+\zeta f') - f'(x+\zeta f)]} = \frac{F(\zeta)}{1+(1-\alpha)(f+\zeta f')},$$

en tenant compte de (2). Par suite,

$$\frac{F(\zeta)}{1+(1-\alpha)(f+\zeta f')} = \sum \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n} D_{a=0}^n \left(\frac{x+af}{1+f}\right)^n \frac{F(a)}{1+f} = \sum \alpha^n P_n(x).$$

(Pour $\alpha = 1$, $\zeta = x$.) D'après la condition connue, cette série converge pour $\alpha = 1$, si $x$ reste intérieur à une courbe fermée comprenant l'origine et telle que, tout le long du contour, $\left|\frac{\lambda(z)}{z}\right|$ soit inférieur à 1. La condition peut s'écrire

$$\left|\frac{x+\psi}{z+\psi}\right| < 1 \qquad [\psi = zf(z)].$$

Si donc il existe une aire S telle que, $x$ étant un point intérieur quelconque et $z$ un point du contour $s$, le module de $\frac{x+\psi(z)}{z+\psi(z)}$ soit plus petit que l'unité, $\Sigma P_n(x)$ converge dans cette aire et représente $F(x)$. Ceci résulte également du théorème établi précédemment. Mais inversement, pour démontrer ce théorème en partant de la série de Lagrange, il faudrait prouver qu'à un contour convexe donné $s$ correspond une fonction $\psi(z)$ vérifiant la condition énoncée. Or la recherche de $\psi(z)$ revient précisément à celle de la fonction désignée par $P + iQ$; c'est cette recherche qui constitue d'ailleurs la seule difficulté de la première démonstration.

6. *Développement en séries des fonctions* $V(x, y, z)$ *satisfaisant à l'équation* $\Delta V = 0$ *et régulières dans un espace quelconque.* — A chaque forme de développement indiquée plus haut, correspond une forme corré-

lative de développement pour les fonctions $V(x, y)$ de deux variables qui satisfont à l'équation $\Delta V = 0$. Si l'on envisage les fonctions de trois variables qui satisfont à la même équation, le premier développement, basé sur la représentation conforme, ne comporte pas d'extension naturelle. Mais les développements (2), (3) et (4) se généralisent sans difficulté. Soient, en premier lieu, une surface fermée quelconque $s$, sans angle rentrant; $\alpha, \beta, \gamma$ un de ses points ($\alpha, \beta, \gamma$ sont fonctions de deux paramètres $\theta$ et $t$). On peut en chaque point $\alpha, \beta, \gamma$ construire une sphère de centre $a, b, c$, tangente à $s$ et extérieure à cette surface. Soit, d'autre part, $F(x, y, z)$ une fonction qui satisfait à $\Delta F = 0$, régulière dans le volume S et continue ainsi que ses dérivées premières $\left(\text{ou ainsi que } \frac{dF}{dn}\right)$ sur $s$:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int\int_s \left( \frac{1}{r} \frac{dF}{dn} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn} F \right) ds,$$

où

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} V_{-n}(x-a, y-b, z-c)$$

et

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = \lambda \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = \sum_{n=0}^{n=\infty} V'_{-(n+1)}(x-a, y-b, z-c);$$

$a, b, c, \lambda, \mu, \nu$ sont fonctions continues de $\alpha, \beta, \gamma$, par suite de $t$ et $\theta$, sauf pour les lignes singulières de $s$. On peut écrire

$$2\pi F(x, y, z) = \Sigma \int\int V''_{-n}(x-a, y-b, z-c)\, d\sigma,$$

en réunissant $V_{-(n+1)}$ et $V'_{-n}$. Soit $\sigma$ la surface lieu des centres $a, b, c$; on peut construire une surface $s'$ formée de fragments de sphères extérieurs à $s$, tournant vers $s$ leur convexité et intérieurs à $\sigma$. Soient $A_1 B_1 C_1, \ldots, A_k B_k C_k$ les centres de ces sphères; la fonction

$$V''_{-n}(x-a, y-b, z-c)$$

se met dans $s'$ sous la forme

$$(\alpha) \qquad \sum_{p=n}^{p=\infty} V^{(1)}_{-p}(x-A_1, y-B_1, z-C_1) + \ldots + V^{(k)}_{-p}(x-A_k, y-B_k, z-C_k),$$

Après l'intégration, la fonction $F(x, y, z)$ est représentée par la série

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \Phi_n(x, y, z),$$

$\Phi_n$ étant une expression de la forme ($\alpha$).

Les remarques faites dans le plan s'appliquent ici : la série converge absolument et uniformément dans tout volume $S_1$ intérieur à S, et sa convergence est de l'ordre des progressions géométriques. Les dérivées de $F(x, y, z)$ s'obtiennent en dérivant les termes de (2), ce qui conduit à des séries de même forme. Les termes de (2) sont nuls identiquement dans l'espace $\Sigma$ extérieur aux sphères $S_1$, $S_2$, ..., $S_k$ et qui ne contient pas S; la série (2) converge donc et est égale à 0 sans $\Sigma$. De là le moyen de former une série de la forme (2) représentant dans deux espaces quelconques deux fonctions $V(x, y, z)$ distinctes.

Le développement (2) est possible d'une infinité de manières : chaque terme $\Phi_n(x, y, z)$ étant donné, on peut lui ajouter une série dont la somme est nulle; de plus on peut ajouter, terme à terme, à la série (2) elle-même des séries de même forme dont la somme est nulle dans $s'$.

Les $V_p(x - A_k, y - B_k, z - C_k)$ sont des combinaisons linéaires des dérivées $p^{\text{ièmes}}$ de $\frac{1}{r}$. On peut remplacer $\frac{1}{r}$ par $\psi(x - A_k, y - B_k, z - C_k)$; $\psi(x, y, z)$ est une fonction qui satisfait à $\Delta\psi = 0$, admet l'origine pour pôle du premier ordre, le résidu étant égal à 1, et ses autres points singuliers $(a_1, b_1, c_1)$, ... sont tels que le point $(x + a_1), (y + b_1), (z + c_1)$ est extérieur à $s'$ (si $x$, $y$, $z$ est compris dans $s'$) ainsi qu'aux sphères $(A_k, B_k, C_k)$. Les coefficients sont indépendants de la forme de $\psi$. On peut déduire de là, pour un espace quelconque, des remarques identiques à celles de M. Appell sur les espaces dont la surface est formée de fragments de sphères.

Si l'on considère le premier terme de (2)

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{a_1}{r_1} + \frac{a_2}{r_2} + \ldots + \frac{a_k}{r_k} + a'_1 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x} + \ldots,$$

on voit, comme pour le plan, que la somme $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ est nulle. Quand l'espace S est extérieur à la surface $s$, rien n'est changé dans le rai-

sonnement précédent; mais, dans ce cas,

$$\frac{1}{2\pi}\int\int_s \frac{dF}{dn}\,ds = a_1 + a_2 + \ldots + a_k = A,$$

A est le résidu de la surface-coupure $s$.

Les développements (3) et (5) s'étendent de la même manière. Il suffit d'entourer la surface convexe $s$ de sphères $\Sigma$ qui lui soient tangentes en chaque point, et l'on voit que

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\sum\int\int_s V_n(x-a, y-b, z-c)\,ds,$$

$V_n$ étant un polynôme de degré $n$ en $x, y, z$, qui satisfait à l'équation

$$\Delta V_n = 0.$$

Il en résulte que

$$(3)\qquad F(x, y, z) = \Sigma P_n(x, y, z),$$

$P_n(x, y, z)$ étant un polynôme de degré $n$ en $x, y, z$, qui satisfait à l'équation $\Delta P_n = 0$. Il suffit, pour que le théorème soit exact, que $F(x, y, z)$ soit continue sur $s$; car, en appliquant à la surface S la méthode de C. Neuman, on met la fonction F sous la forme

$$F(x, y, z) = \int\int_s G(t, \theta)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,ds,$$

G étant une certaine fonction continue de $t$ et de $\theta$. En raisonnant sur cette intégrale comme dans le premier cas, on voit que la fonction $F(x, y, z)$, *continue sur s et régulière dans* S, peut se développer, dans ce volume, en *une série de polynômes* $P_n$, *satisfaisant à l'équation* $\Delta P_n = 0$.

*Discussion.* — On démontre (comme dans le cas du plan) que, si $(rt - s^2)$ ne s'annule en aucun point de $s$, on peut trouver un rayon R assez grand pour que toutes les sphères tangentes à $s$ et de rayon $r$ comprennent S à leur intérieur. Si $(rt - s^2)$ s'annule en des points ou sur des lignes de $s$, le théorème subsiste, car il suffit de décomposer l'intégrale en deux parties, dont l'une, relative aux parties singulières de la surface, peut être prise aussi petite qu'on veut. Quand $(rt - s^2)$ s'annule sur une portion finie de $s$ ($s$ comprend un fragment de surface développable), il faut avoir

recours à la remarque suivante : Soit l'espace S intérieur (ou extérieur) à une surface fermée quelconque $s$. S'il existe, en dehors de S, un point (A, B, C), tel que, en le prenant pour pôle d'inversion, S devienne l'espace intérieur à une surface convexe, la fonction $F(x, y, z)$ régulière dans S se met sous la forme

$$F(x,y,z) = h + \sum_{n=0}^{n=\infty} P_n\left[\frac{x-A}{(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2}, \frac{y-B}{(x-A)^2+\ldots}, \frac{z-C}{(x-A)^2+\ldots}\right]$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2}}$$
$$= h + \sum_{n=0}^{n=\infty} P'_n(x,y,z);$$

$P'_n$ est une combinaison linéaire des dérivées d'ordre $n$ et d'ordre inférieur de $\frac{1}{\sqrt{(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2}} = \frac{1}{r}$.

Ce point (A, B, C) existe aux conditions suivantes : soient M et N les deux centres de courbure des sections principales de la surface au point $P(\alpha, \beta, \gamma)$, MP le plus grand rayon. Si, au point P, la surface $s$ est à courbure positive, nous construisons la sphère $\Sigma'$ dont le rayon est MP, quand $s$ tourne sa *concavité* vers S; autrement, nous contruisons la sphère $\Sigma''$ dont le rayon est NP. Si, au point P, la courbure de $s$ est négative, nous construisons la sphère $\Sigma''$ qui passe par P et qui a pour centre celui des deux points M, N qui est, par rapport à $s$, du côté opposé à S. Il faut et il suffit, pour que (A, B, C) existe, qu'il y ait, en dehors de S, une portion d'espace S, extérieure à toutes les sphères $\Sigma'$ et intérieure à toutes les sphères $\Sigma''$. Ces sphères se réduisent à des plans aux points où $(rt - s^2)$ est nul. Quand $(rt - s^2)$ est toujours positif ou nul, il faut et il suffit (si l'on désigne par P l'espace situé, par rapport à un plan tangent en un point de $s$, du côté opposé à S) que tous les espaces P relatifs aux points où $(rt - s^2)$ s'annule aient une partie commune.

Quand le point (A, B, C) n'existe pas, on peut toujours décomposer $s$ (si S ne présente pas d'angle rentrant) en parties $s_1, s_2, \ldots, s_k$, assez petites pour qu'il y ait, en dehors de S, des points $M_i$, tels que toutes les sphères qui passent par $M_i$ et sont tangentes à $s_i$ en chaque point soient extérieures à S. En décomposant l'intégrale qui représente $F(x, y, z)$ en plusieurs

autres relatives respectivement à $s_1, s_2, \ldots, s_k$, on voit que

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} F(x,y,z) &= h + \sum_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{1}{r_1}P_1^{(n)}\left(\frac{x-A_1}{r_1^2}, \frac{y-B_1}{r_1^2}, \frac{z-C_1}{r_1^2}\right)+\ldots\right.\\ &\qquad\left. + \frac{1}{r_k}P_k^{(n)}\left(\frac{x-A_k}{r_k^2}, \frac{y-B_k}{r_k^2}, \frac{z-C_k}{r_k}\right)\right]\\ &= h + \sum_{n=0}^{n=\infty} P_1^{(n)}(x,y,z)+\ldots+P_k^{(n)}(x,y,z)\end{aligned}\right.$$

[$P_i^{(n)}$ est une combinaison linéaire des dérivées d'ordre $n$ et d'ordre inférieur de $\frac{1}{r_i} = \frac{1}{\sqrt{(x-A_i)^2+(y-B_i)^2+(z-C_i)^2}}$, $A_i$, $B_i$, $C_i$ désignant les coordonnées de $M_i$].

Les séries (3) et (4) convergent absolument et uniformément dans tout espace $\Sigma$ intérieur à S. Les dérivées de F s'obtiennent en dérivant les termes des séries (3) et (4), ce qui conduit à des séries de même forme. Dans le développement (3) en particulier, si

$$P_n(x,y,z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{\alpha,\beta,\gamma}^{(n)} \times x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

$$\frac{\partial^p F(x,y,z)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = \sum_{n=p}^{n=\infty} a_{\alpha,\beta,\gamma}^{(n)} \qquad \text{pour} \quad x=y=z=0.$$

Les développements (3) et (4) sont possibles d'une infinité de manières. On peut se donner arbitrairement les $n$ premiers termes ou assujettir les polynômes $P_n$ à ne pas contenir, au delà du $p^{\text{ième}}$, de termes de degré inférieur à $p$. On peut faire en sorte, par exemple, que les termes en $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_k}$ figurent seulement dans le premier terme du développement (4). Si S est l'espace extérieur à une surface, le résidu de cette coupure est alors égal à $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, les lettres $a_1, a_2, \ldots, a_k$ désignant les coefficients respectifs de $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_k}$.

Quand $F(x,y,z)$ n'est pas continue sur $s$, la convergence des séries (2), (3) et (4) ne s'établit que dans des cas particuliers.

# CHAPITRE II.

I. Soit $F(z)$ une fonction uniforme de $z$ qui ne présente dans le plan des $z$ qu'un nombre fini de singularités $L_1, L_2, \ldots, L_n$ (coupures, espaces lacunaires, points essentiels ou pôles) : $L_1, L_2, \ldots, L_n$ n'ont pas de points communs. Cette fonction peut se mettre sous la forme *d'une somme de $n$ fonctions n'admettant chacune dans le plan qu'une singularité*.

Il suffit, pour le voir, de répéter le raisonnement employé par M. Bourguet dans le cas des points singuliers. On trace $n$ contours $s_1, s_2, \ldots, s_n$, comprenant chacun à son intérieur une des singularités et une seule : quand la ligne $L_i$ est fermée et n'enclôt pas un espace lacunaire, le contour $s_i$ est multiple. La fonction $F(z)$ (qu'on suppose régulière à l'infini) est holomorphe dans l'aire S extérieure aux contours $s_i$ et intérieure à un cercle C de centre O et de rayon assez grand pour enfermer toutes les coupures $L_i$. Si $x$ désigne un point de S, $s$ le contour de cette aire, on a

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{F(z)\,dz}{z-x} = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_C \frac{F(z)\,dz}{z-x} + \ldots + \int_{s_i} \frac{F(z)\,dz}{z-x} + \ldots + \int_{s_n} \frac{F(z)\,dz}{z-x}\right].$$

La première intégrale est une constante $2i\pi h$ ; l'intégrale $\int_{s_i} \frac{F(z)\,dz}{z-x}$ définit une fonction de $x$ holomorphe à l'extérieur de $L_i$, car on peut prendre $s_i$ aussi voisin de L qu'on veut sans changer la valeur de l'intégrale pour les points $x$ extérieurs à $s_i$ : $F(x)$ se met donc sous la forme

$$F(x) = h + f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),$$

chacune des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ n'admettant qu'une des singularités $L_1$, $L_2, \ldots, L_n$.

Le cas où $F(x)$ n'est pas holomorphe à l'infini se ramène au précédent, en posant $z = \frac{1}{z_1 - a}$ ; $F(x)$ est alors une somme de $n$ fonctions dont l'une a, pour lignes singulières, plusieurs lignes L' ayant des points à l'infini.

Le long de $s$, l'intégrale $\int_s F(z)\,dz$ est nulle : si donc on appelle *résidu* de $L_i$ la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_{s_i} F(z)\,dz$, on voit que la *somme des résidus de $F(x)$ dans le plan est nulle*. Quand la fonction $F(x)$ est holomorphe

à l'infini, le résidu du point $z=\infty$ est le coefficient de $\frac{1}{x}$, changé de signe, dans le développement de $F(x)$ à l'extérieur d'un cercle de rayon suffisamment grand. Si le point $z=\infty$ est un point singulier de $F(x)$, le résidu relatif à la coupure L′ est la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int F(z)\,dz$ prise, dans le sens inverse, le long d'un contour fermé entourant toutes les singularités, sauf L′.

Ce qui précède s'applique à la fonction $\frac{F'(x)}{F(x)}$; quand $F(x)$ n'a, dans le plan, qu'un nombre fini de zéros ou de singularités, on en conclut, en intégrant et en passant du logarithme à la fonction, que $F(x)$ peut se développer ainsi

$$F(x)=(x-a_1)^{p_1}(x-a_2)^{p_2}\ldots(x-a_i)^{p_i}\times e^{f_1(x)}\times e^{f_2(x)}\times\ldots\times e^{f_n(x)},$$

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ n'ayant respectivement qu'une singularité $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Si l'on appelle *ordre* de la coupure $L_i$ l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma_i}\frac{F'(z)\,dz}{F(z)}$, *la somme des ordres de* $F(x)$ *est nulle* dans le plan.

*Remarque.* — Il est possible, dans bien des cas, de *décomposer* une singularité formée d'une ligne continue en plusieurs ordres, grâce à l'observation suivante :

Soit L une coupure non fermée de $F(x)$; A et B sont ses extrémités, C un point de AB. Posons

$$f(x)=\int_\sigma\frac{F(z)\,dz}{z-x}$$

($\sigma$ désignant un contour fermé ne contenant que la coupure L). S'il existe un chemin $l$, traversant AB au point C, et sur lequel $|F(x)|$ ne croisse pas indéfiniment, on peut décomposer $f(x)$ en une somme de deux fonctions, qui n'admettent respectivement comme coupure que AC et CB. En effet, $l$ rencontre $\sigma$ aux points M et N et décompose $\sigma$ en deux parties $\sigma_1$ et $\sigma_2$, formant avec $l$ deux contours fermés $\sigma_1+$ MN et $\sigma_2+$ NM, qui contiennent le premier AC, le second BC. On peut écrire

$$f(x)=\int_{\sigma_1+\mathrm{MN}}\frac{F(z)\,dz}{z-x}+\int_{\sigma_2+\mathrm{NM}}\frac{F(z)\,dz}{z-x}=f_1(x)+f_2(x);$$

$f_1(x)$ est définie pour toute valeur de $x$ extérieure à AC, car on peut toujours tracer un contour $\sigma'$, laissant à l'extérieur le point $x$ et entourant AB :

ce contour rencontre le chemin $l$ aux points M', N', et l'on a

$$f_1(x) = \int_{\sigma_1 + M'N'} \frac{F(z)\,dz}{z - x} = \int_{\sigma'_1 + MN} \frac{F(z)\,dz}{z - x},$$

car $F(x)$ est holomorphe à l'intérieur du contour formé par $\sigma_1$, $\sigma'_1$, MM' et NN'. De même, $f_2(x)$ est holomorphe à l'extérieur de BC. Il suffit, pour que la remarque s'applique, qu'il existe un chemin $l$, tel que, $z$ et $z_1$ tendant vers C sur $l$ de part et d'autre de L et suivant une certaine loi,

$$\int\left[\frac{F(z)\,dz}{z - x} - \frac{F(z_1)\,dz_1}{z_1 - x}\right]$$

tende vers une limite $\varphi(x)$. Il suffit même qu'on puisse trouver deux fonctions $g_1(x)$, $g_2(x)$ n'ayant respectivement pour coupures que AC et CB, telles que $F_1(x) = F(x) + g_1(x) + g_2(x)$ vérifie la condition précédente.

Quand la coupure L est une ligne fermée ne limitant pas un espace lacunaire, si cette condition est remplie pour deux points C et D de L, on peut la décomposer en deux coupures CED, CFD.

Quand L limite un espace lacunaire $\Sigma$, si, pour deux points C et D de L, il existe deux chemins $l$ et $l'$ sur lesquels $|F(x)|$ ne croisse pas indéfiniment quand $z$ tend vers C sur $l$, et vers D sur $l'$, à l'extérieur de $\Sigma$, la coupure peut se décomposer en deux parties CED, CFD. Il suffit même que, $z$ et $z'$ tendant simultanément vers C et D sur $l$ et $l'$ (suivant une certaine loi), $\int\left[\frac{F(z)\,dz}{z - x} - \frac{F(z')\,dz'}{z' - x}\right]$ tende vers une limite $\varphi(x)$.

Dans tous les cas, cette condition n'étant pas remplie, on peut tracer un chemin arbitraire MN rencontrant la coupure L (qu'on suppose ouverte) au point C, et définir $f_1(x)$ et $f_2(x)$ de la manière suivante

$$f_1(x) = \int_{\sigma_1} \frac{F(z)\,dz}{z - x},$$

$\sigma_1$ étant un contour qui passe par M et N, sans rencontrer le chemin MN en d'autres points, et qui entoure AC en laissant $x$ à son extérieur. De même,

$$f_2(x) = \int_{\sigma_2} \frac{F(z)\,dz}{z - x},$$

$\sigma_2$ entoure BC; $f_1$ et $f_2$ admettent respectivement les coupures AC et BC, et la coupure commune MN, qu'on peut prendre aussi petite qu'on veut. En appliquant le même raisonnement à l'extrémité A de AB, on voit que $f_1(x)$ est la somme de deux fonctions $f'_1$ et $f''_1$ ayant

comme coupures la première une ligne $MCAM_1$, la seconde une ligne $NCAM_1$ [$M_1$ est un point arbitraire qui, parfois, peut se confondre avec A, notamment si $\left|\int \frac{F(z)\,dz}{z-x}\right|$ ne croît pas indéfiniment quand $z$ tend vers A].

Quand la coupure L est une ligne fermée, on peut décomposer $f(x)$ en une somme de deux fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ ayant respectivement pour coupures les lignes CED, CFD, et les deux coupures artificielles communes MCN, $M_1DN_1$. Si l'on remarque que $f_1(x)$ et $f_2(x)$ deviennent infinies aux points M, N, $M_1$, $N_1$ comme $\log(x)$ pour $x = 0$, il est clair qu'on peut décomposer $f_1(x)$, par exemple, en quatre fonctions ayant respectivement pour coupures $MCDM_1$, MN, $M_1N_1$, $M_1CDN_1$. La conclusion est analogue si L limite un espace lacunaire. On peut, en définitive, décomposer, dans tous les cas, la fonction $F(x)$ en une somme de fonctions dont *chacune est holomorphe dans l'aire extérieure à un contour fermé ou à une ligne non fermée ne se coupant pas.*

Quand L est décomposée en deux coupures L', L", le *résidu* de $F(x)$ relatif à L' est égal à la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_\sigma f_1(z)\,dz$, $f_1(x)$ n'admettant que la coupure L' qu'entoure $\sigma$. Ces résidus jouissent des propriétés ordinaires. Si plusieurs coupures L' ont des points à l'infini, la fonction $f(z)$ qui a pour coupure L' est la somme de plusieurs fonctions dont chacune admet pour coupure une des lignes L' et une certaine ligne $L_1$ arbitraire, ayant un point à l'infini, et qui disparaît dans certains cas.

Les mêmes remarques s'appliquent à la fonction $\frac{F'(x)}{F(x)}$ et, par suite, à la décomposition en produit.

2. La fonction $F(x)$ étant ramenée à une somme de fonctions plus simples, on peut chercher à développer ces fonctions à l'aide des séries étudiées plus haut.

Il est facile de décomposer dans tous les cas $F(x)$ en une somme de fonctions $\sum_1^p \varphi_\nu(x)$, auxquelles le développement (1) s'applique, puisque cette forme de développement convient pour toute fonction $f(x)$ holomorphe à l'extérieur d'une ligne (fermée ou non) qui ne se coupe pas. La fonction

$F(x)$ est alors de la forme

$$(1) \qquad F(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} h_\nu + \frac{A_\nu}{f_\nu(x) - a} + \frac{B_\nu}{[f_\nu(x) - a]^2} + \ldots.$$

La somme $\sum_1^p A_\nu$ est nulle, car $A_\nu$ est le résidu relatif à chaque coupure $L_\nu$.

Les développements (2), (3), (4) peuvent ne pas s'appliquer aux fonctions $\varphi_\nu(x)$; nous avons indiqué dans quels cas au Chapitre précédent. On tâche alors de décomposer les fonctions exceptionnelles $\varphi_\nu(x)$ en une somme de fonctions pour lesquelles ces développements conviennent. Mais la chose n'est pas réalisable nécessairement. Ces cas écartés, la fonction $F(x)$ peut se mettre sous la forme d'une somme de $p$ séries (2), (3) ou (4). Nous avons indiqué les valeurs des résidus en fonction des coefficients de ces séries : la somme de ces valeurs est nulle.

Ces développements fournissent autant de formes de décomposition en produit de $F(x)$ : par exemple, la forme (1) donne

$$F(x) = C(x-a)^{\alpha_1}(x-b)^{\alpha_2}\ldots(x-l)\prod_{i=1}^{i=p}[f_i(x) - a_i]^{p_i} e^{G\left[\frac{1}{f_i(x) - a_i}\right]}.$$

La somme $\Sigma\alpha_j + \Sigma p_i$ est nulle.

3. Supposons maintenant que $F(x)$ admette dans le plan une infinité de singularités $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$, sans points communs. Chacune d'elles, L, suite ou non d'autres singularités, peut toujours être entourée d'une certaine aire S à double contour, à l'intérieur de laquelle $F(x)$ est holomorphe : $F(x)$ peut se développer dans S à l'aide des séries ci-dessus, ou bien encore, en se rappelant que l'aire S admet la représentation conforme sur une couronne limitée par deux cercles concentriques, on met $F(x)$ sous la forme

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{a_n}{[f(x) - a]^n},$$

et

$$F(x) = [f(x) - a]^m (x-a)\ldots(x-l) e^{\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{[f(x)-a]^n}}.$$

C'est la généralisation du théorème de Laurent. On peut définir la fonction caractéristique de la singularité L comme dans la théorie des points

essentiels, et elle jouit des mêmes propriétés. On peut définir également *le résidu et l'ordre* par les intégrales $\int_\sigma F(z)dz$ et $\int_\sigma \frac{F'(z)}{F(z)}dz$ ($\sigma$ étant le contour fermé qui limite S à l'intérieur) : ces deux intégrales varient en général avec $\sigma$. Il est clair que les théorèmes énoncés sur les résidus et les ordres subsistent avec la nouvelle définition. Enfin, la classification des points singuliers s'étend sans modification aux lignes singulières; mais je renvoie pour cette question à un Mémoire de M. Guichard sur les points essentiels (*Annales de l'École Normale*, année 1884).

En raisonnant comme au n° I, on met la fonction $F(x)$ sous la forme

$$F(x) = F_1(x) + f_1(x),$$

$f_1(x)$ n'ayant que la singularité $L_1$ et $F_1(x)$ étant holomorphe sur $L_1$ ($L_1$ peut comprendre un ensemble de singularités). Mais, quand les lignes $L_1$, $L_2$, ..., $L_n$, ... forment une suite dont la limite est L, existe-t-il une série convergente $\Sigma f_n(x) = F(x)$, telle que chaque terme n'admette en dehors de L qu'une singularité $L_n$? Le théorème de M. Mittag-Leffler permet de répondre à cette question.

Théorème de M. Mittag-Leffler. — Soit $f_n(x) = \int_{\sigma_n} \frac{F(z)\,dz}{z-x}$ ($\sigma_n$ n'entourant que la coupure $L_n$). *Il existe une fonction* $H_n(x)$ *n'ayant que des pôles isolés sur* L, *telle que la série* $\sum_{n=1}^{n=\infty} [f_n(x) - H_n(x)]$ *soit convergente pour tout point* $x$ *extérieur à* L *et aux* $L_n$.

En effet, chaque terme $f_n(x)$ est holomorphe dans l'espace $S_n$ extérieur à un certain contour $s_n$ d'arcs de cercles dont les centres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont sur L, et $f_n(x)$ se développe dans $S_n$ ainsi :

$$f_n(x) = \sum \frac{a_p}{(x-\alpha_1)^p} + \frac{b_p}{(x-\alpha_2)^p} + \ldots + \frac{l_p}{(x-\alpha_k)^p}.$$

On peut prendre un nombre $q_n$ assez grand pour que (quand $x$ varie à l'extérieur d'un contour $\sigma'_n$ voisin de $\sigma_n$ et l'entourant, mais sans point commun avec lui), le reste

$$R_{q_n}(x) = f_n(x) - \sum_{p=0}^{p=q_n} \frac{a_p}{(x-\alpha_1)^p} + \ldots + \frac{l_p}{(x-\alpha_k)^p}$$

ait un module inférieur à un nombre positif donné $\varepsilon_n$. Si l'on choisit les $\varepsilon_n$ de manière que la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n$ soit convergente, la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} R_{q_n}(x)$ représente une fonction holomorphe de $x$ pour tout point $x$ qui n'appartient ni à L, ni aux singularités $L_n$; car, pour des valeurs de $n$ supérieures à un certain nombre $\nu$, le point $x$ est extérieur aux contours $s'_n$ (puisque ces contours tendent vers L quand $n$ croît indéfiniment), et la série $\sum_{n=\nu+1}^{n=\infty} R_{q_n}(x)$ converge absolument et uniformément dans un certain espace entourant $x$; d'autre part, la somme $\sum_{n=1}^{n=\nu} R_{q_n}(x)$ est holomorphe au point $x$.

Ajoutons que la différence $F(x) - \sum_{n=1}^{n=\infty} R_{q_n}(x)$ peut s'écrire

$$F(x) - f_m(x) - \left[\sum_{n=1}^{n=m} R_{q_n}(x) - f_m(x)\right] = F_m(x) + H_m(x),$$

$F_m$ et $H_m$ étant holomorphes dans le voisinage de $L_m$. La fonction $F(x)$ peut donc se décomposer en une somme de fonctions $\varphi_n(x)$ n'ayant qu'une singularité en dehors de L,

$$F(x) = G(x) + \Sigma h_n(x). \tag{2}$$

$G(x)$ n'admet que la singularité L dans le voisinage de cette ligne.

Les remarques faites sur la décomposition des coupures en plusieurs autres permettent d'apercevoir aisément les cas principaux où le théorème subsiste, les coupures $L_n$ ayant des points communs.

Dans le cas où L limite un espace lacunaire $\Sigma$, on peut prendre les centres $\alpha_i$ des cercles qui forment le contour $s_n$, non plus sur L, mais à l'intérieur de $\Sigma$. Le cas d'une coupure ouverte AB peut se ramener à celui d'un espace lacunaire par la transformation

$$x_1 = x + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x-a)(x-b)}.$$

Quand l'espace S extérieur à L admet la représentation conforme sur un cercle, on peut donner une autre démonstration du théorème.

Soit $x_1 = \varphi(x)$ la fonction *figurative* de L; cette fonctio[illegible]résente S

sur l'espace $\Sigma$ extérieur à un certain cercle C du plan des $x_1$, de rayon R : à des cercles $C'_n$ de même centre et de rayon $R'_n$ ($R'_n$ étant supérieur à R), correspondent des courbes $\sigma_n$ entourant L et sans points communs avec cette ligne. On peut raisonner sur ces courbes $\sigma_n$, comme sur les contours $s_n$ d'arcs de cercles : la fonction à retrancher est alors de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=p} a_0 + \frac{a_\nu}{\varphi(x)-a} + \ldots + \frac{a_\nu}{[\varphi(x)-a]^\nu} + \ldots + \frac{a_p}{[\varphi(x)-a]^p}.$$

Ce sont les premiers termes du développement de $f_n(x)$ à l'extérieur du contour $\sigma_n$ qui entoure L et $L_n$. Dans ce cas [si $F(x)$ n'admet pas de singularités en dehors des $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots,$ L], cette fonction se met sous la forme

(3) $$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\alpha_\nu}{[\varphi(x)-a]^\nu} + \sum_{p=1}^{p=\infty} h_p(x),$$

où

$$h_p(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\alpha_\nu^{(p)}}{[\varphi_p(x)-a_p]} - P_p\left[\frac{1}{\varphi(x)-a}\right],$$

$P_p$ désignant un polynôme en $\dfrac{1}{\varphi(x)-a}$.

On pourra aussi appliquer, dans bien des cas, les développements (2), (3) ou (4). Par exemple, si L est une courbe convexe à l'extérieur de laquelle $F(x)$ n'est pas définie, et qui sert de limite à des espaces lacunaires $L_n$, à l'extérieur desquels le développement (3) converge (les $L_n$ peuvent être des points isolés, ou des cercles), la fonction $F(x)$ est de la forme

(4) $$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} P_\nu(x) + \sum_{p=1}^{p=\infty} h_p(x),$$

où

$$h_p(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} P_\nu^{(p)}\left(\frac{1}{x-a_p}\right) - Q_p(x).$$

Les $P_\nu(z)$, $P_\nu^{(p)}(z)$ sont des polynômes en $z$, comme les $Q_p(z)$ [ces derniers sont les premiers termes du développement des $f_p(z)$ à l'intérieur d'une aire convexe, qui tend vers L]. On peut prendre aussi pour les $Q_p(x)$ des fonctions qui n'ont que des pôles distribués sur L, ou des pôles extérieurs à L (d'après la première démonstration).

Si la fonction $F(x)$ a $m$ singularités, telles que L, elle est la somme de $m$ développements analogues aux précédents.

Au théorème sur la décomposition en somme correspond un théorème sur la décomposition en produit. Il suffit d'appliquer les résultats obtenus à $\frac{F'(x)}{F(x)}$. Si $F(x)$ présente une suite de zéros $a_i$ et de singularités $b_j$, qui tendent vers L, on a [d'après la formule (2)]

$$(5)\qquad F(x) = e^{G(x)} \prod \left(\frac{x-a_i}{x-\alpha_i}\right)^{p_i} e^{g_i\left(\frac{1}{x-\alpha_i}\right)} \Pi\, h_n(x),$$

les $h_n(x)$ ne s'annulant pas et n'admettant qu'une singularité $b_n$, en dehors de L; $\alpha_i$ désigne un point de L, tel que $|a_i - \alpha_i|$ tende vers o avec $\frac{1}{i}$, et $g_i(z)$ est un polynôme en $z$. En particulier, quand les singularités $b_j$ sont des points isolés, on a

$$h_n(x) = \left(\frac{x-b_n}{x-\beta_n}\right)^{p_n} e^{\gamma_n\left(\frac{1}{x-b_n}\right) - g'_n\left(\frac{1}{x-\beta_n}\right)},$$

$\gamma_n(z)$ est une fonction holomorphe de $z$, $g'_n(z)$ un polynôme en $z$. Si ces singularités $b_j$ n'existent pas, on retombe sur la formule de développement en produit, indiquée par M. Picard.

On obtient d'autres formes de développement en appliquant la formule (3). Par exemple, si L est un cercle C de centre O à l'extérieur duquel $F(x)$ est définie et holomorphe, les zéros de F tendant vers C, $F(x)$ se développe ainsi

$$F(x) = e^{G\left(\frac{1}{x}\right)} \prod \left(\frac{x-a_i}{x}\right)^{p_i} e^{g_i\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

On parvient au même développement en appliquant la formule (4), ou en se servant de la remarque qu'on peut prendre les points $\alpha_i$ à l'intérieur de C, et ici les faire coïncider avec l'origine.

Il est à remarquer que cette dernière forme est identique à celle du développement de $F(x)$ quand F a l'origine pour point essentiel et est holomorphe dans le reste du plan. Plus généralement, si C est la limite de cercles $C_n$, qui enferment un espace lacunaire de $F(x)$, le développement de la fonction en somme ou en produit peut se mettre sous la même forme que dans le cas où $F(x)$ admet le point essentiel O, limite d'autres points essentiels.

On voit quelle diversité de formes on peut donner aux développements précédents. La seule difficulté pratique de la méthode réside, comme pour le cas des points essentiels, dans le calcul direct de la fonction désignée par $G(x)$ et qui admet L comme coupure.

Il est facile dès lors de former l'expression la plus générale des fonctions simplement et doublement périodiques. Nous dirons un mot de ces dernières.

4. *Applications aux fonctions doublement périodiques.* — En premier lieu, le théorème des résidus et le théorème de Liouville subsistent quand la fonction doublement périodique $F(x)$ admet des singularités quelconques : car les intégrales $\int_P F(z)\,dz$ et $\int_P \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz$ (P désignant le parallélogramme des périodes) sont nulles. *Donc la somme des résidus et celle des ordres sont nulles dans* P.

Si, de plus, on considère l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int \frac{z\,F'(z)\,dz}{F(z)}$, on voit, sans peine, en la mettant sous la forme

$$\frac{1}{2i\pi}(z\,\mathrm{L}z)_0^0(\mathrm{P}) - \frac{1}{2i\pi}\int_P \mathrm{L}\,F(z)\,dz,$$

que sa valeur est de la forme $m\omega + n\omega'$, $\omega$ et $\omega'$ désignant les périodes.

D'autre part, soit $f(x)$ une fonction holomorphe et ne s'annulant pas à l'extérieur d'un cercle C de centre $a$, $\frac{f'(x)}{f(x)}$ se développe dans cet espace de la manière suivante

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{n}{z-a} + \frac{\alpha}{(z-a)^2} + \frac{\beta}{(z-a)^3} + \ldots,$$

et l'on a

$$\int_C \frac{z\,f'(z)}{f(z)}\,dz = na + \alpha.$$

Si l'on considère chaque fonction $f_i(x) = \int_{\sigma_i} \frac{F(z)\,dz}{z-x}$ [$\sigma_i$ entourant un seul zéro ou une seule singularité de $F(x)$], la somme des quantités $n_i a_i + \alpha_i$, dans P, est de la forme $m\omega + n\omega'$.

En particulier, supposons qu'on développe la fonction $f_i(x)$ en somme

on en produit, à l'aide de la série 1,

$$f_i(x) = h_i + \frac{k_i}{\varphi(x) - a_i} + \frac{l_i}{[\varphi(x) - a_i]^2} + \ldots$$

et

$$f_i(x) = [\varphi(x) - a_i]^{n_i} e^{\left\{\frac{\beta_i}{\varphi(x) - a_i} + \frac{\gamma_i}{[\varphi(x) - a_i]^2} + \ldots\right\}},$$

les sommes $\sum_1^p k_i$ et $\sum_1^q n_i$ doivent être nulles dans P, et la somme $\sum_1^q (n_i a_i - \beta_i)$ est de la forme $m\omega + n\omega'$. Ceci résulte des égalités établies au n° I du Chapitre précédent. Nous avons dit que $a_i$ était l'*affixe* de la singularité correspondante : si l'on appelle *reste* de cette singularité le coefficient $\beta_i$ changé de signe, on voit que *la somme des restes des singularités dans* P, *augmentés du produit de leur affixe par l'ordre correspondant, doit être égale à une somme de multiples des périodes* $\omega$ *et* $\omega'$.

Si l'on applique à $f_i(x)$ les développement (2), (3), (4), les égalités (3') et (4'), établies dans le Chapitre I, fournissent les valeurs des trois intégrales définies considérées, en fonction des coefficients.

Réciproquement, on peut former une fonction doublement périodique ayant $p$ singularités données (ou $p$ singularités et $p'$ zéros) dans P, si les résidus, ordres et restes de ces singularités, vérifient les conditions énoncées. Il suffit, pour établir cette réciproque, de raisonner comme dans le cas des points essentiels : on peut entourer toutes les singularités (formées ou non d'un ensemble de singularités distinctes), de contours d'arcs de cercles, et appliquer la méthode de M. Appell, ou la méthode de décomposition en sommes et en produits doublement infinis. Je renvoie, pour cette question, au Mémoire déjà cité de M. Guichard.

Quand les singularités se composent de $n$ espaces lacunaires, on peut appliquer aussi à ces espaces le mode de développement (2), où la fonction élémentaire $\frac{1}{z - x}$ est remplacée par $Z(z - x)$. Les termes du développement sont des fonctions linéaires de Z et de ses dérivées. C'est la généralisation de la méthode de M. Appell.

Il est facile encore de développer $F(x)$ (cette fonction présentant dans P un nombre fini de zéros ou de singularités) en sommes ou en produits doublement infinis, dont les termes $\varphi_p(z + m\omega + n\omega')$ sont représentés par des intégrales définies ou par des développements de la forme (1), (2), (3) ou (4). La démonstration ordinaire s'étend aisément au cas actuel.

Enfin, si l'on emploie la méthode de M. Hermite, on voit que

$$F(x) = f(\operatorname{sn} x) + \operatorname{cn}(x)\operatorname{dn}(x)\varphi[\operatorname{sn}(x)],$$

et l'on sait développer $f(t)$ et $\varphi(t)$ qui ont $n$ singularités dans le plan.

Les fonctions de première et de seconde espèce s'obtiennent de la même manière; mais je n'insiste pas davantage sur ces considérations, dont le seul intérêt est de montrer la généralité des raisonnements sur lesquels repose la théorie des points essentiels.

5. *Extension des théorèmes précédents aux fonctions* $V(x, y, z)$ *qui satisfont à l'équation* $\Delta V = 0$. — Les théorèmes que nous venons d'énoncer ont leurs correspondants dans l'étude des fonctions $V(x, y, z)$ de trois variables, qui satisfont à l'équation $\Delta V = 0$. Nous nous contentons de les énoncer: les démonstrations se déduisent de celles qu'on a données dans le plan, à condition de raisonner sur l'intégrale $\int\int\left(\frac{dV}{dn}\frac{1}{r} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn}V_1\right)ds$ comme sur $\int\frac{f(z)\,dz}{z-x}$.

1° *Une fonction affectée de n singularités (sans points communs) est la somme de n fonctions* $V_p$ *n'ayant chacune qu'une singularité.* — Lorsqu'une ligne L divise une surface coupure $\sigma$ en deux parties $\sigma_1$ et $\sigma_2$, et que, sur une surface $s$ traversant $\sigma$ et passant par L, V et ses dérivées premières ne croissent pas au delà de toute limite, on peut décomposer la fonction qui admet $\sigma$ comme coupure, en une somme de deux fonctions admettant respectivement les coupures $\sigma_1$ et $\sigma_2$. Cette décomposition est possible dans tous les cas, à condition d'ajouter une coupure arbitraire $s$.

2° La somme des résidus de V est nulle dans tout l'espace, en définissant convenablement le résidu relatif au point à l'infini. (Le résidu de $\sigma$ est la valeur de l'intégrale définie $\int\int_s \frac{dV}{dn}ds$, $s$ entourant la seule singularité $\sigma$.)

Quand $V(x, y, z)$ présente des espaces lacunaires sur la surface desquels V est continue, on peut développer les fonctions $V_p$ sous les formes (2), (3) ou (4). La somme des coefficients de ces développements qui représentent les résidus est nulle.

3° Lorsque les singularités $S_n$ de V forment une suite ayant pour limite S, on peut encore mettre $V(x, y, z)$ sous la forme $W(x, y, z) + \sum V_n(x, y, z)$, les $V_n(x, y, z)$ n'ayant qu'une singularité $S_n$ et des pôles sur S, et $W(x, y, z)$

n'ayant d'autre singularité que S. La démonstration est identique à celle qu'on a donnée pour le plan; on entoure les $S_n$ d'une surface $\Sigma_n$ formée de portions de sphères dont les centres $\alpha_i$ sont sur S, et l'on retranche de chaque fonction $V'_n = \int\int_{s_n} \left( \frac{dV}{dn}\frac{1}{r} - V\frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) ds$ les premiers termes de son développement à l'extérieur de $\Sigma_n$. Quand S limite un espace lacunaire, on peut prendre les $\alpha_i$ dans cet espace. On peut aussi remplacer la surface $\Sigma_n$ par une autre surface, à l'extérieur de laquelle on développe $V'_n$.

S'il existe $p$ singularités, telles que S, $V(x, y, z)$ est la somme de $p$ séries analogues.

Ce qui précède s'applique, en particulier, aux fonctions $V(x, y, z)$ à trois périodes. La somme des résidus est nulle dans le parallélépipède élémentaire. Si l'on entoure chaque singularité à l'aide de portions de sphères, on peut employer la méthode de M. Appell. Quand $V(x, y, z)$ présente $n$ espaces lacunaires sur la surface desquels $V(x, y, z)$ est continue, le développement (2), où l'on remplace l'élément simple $\frac{1}{r}(x, y, z)$ par $Z(x, y, z)$, permet de généraliser cette méthode. Il est facile aussi de mettre $V(x, y, z)$ sous la forme d'une série triplement infinie, dont les termes $V_i(x + m\omega', y + n\omega, z + p\omega'')$ sont représentés par des intégrales définies ou des développements (2), (3) ou (4). Mais je renvoie, pour ces divers points, au Mémoire de M. Appell sur les fonctions $V(x, y, z)$ qui satisfont à l'équation $\Delta V = 0$ (*Acta mathematica*, t. IV).

Octobre 1886.

# REMARQUES

SUR LA

# DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

## DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES;

PAR M. HERMITE.

En désignant par $F(x)$ une fonction uniforme aux périodes $2K$ et $2iK'$, et par $a, b, \ldots, l$ ses pôles situés à l'intérieur du rectangle des périodes, on a l'expression suivante

$$\begin{aligned}
F(x) = C &+ A\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + B\frac{H'(x-b)}{H(x-b)} + \ldots + L\frac{H'(x-l)}{H(x-l)} \\
&+ D_x\left[A'\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + B'\frac{H'(x-b)}{H(x-b)} + \ldots + L'\frac{H'(x-l)}{H(x-l)}\right] \\
&+ D_x^2\left[A''\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + B''\frac{H'(x-b)}{H(x-b)} + \ldots + L''\frac{H'(x-l)}{H(x-l)}\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ou bien, pour abréger,

$$\begin{aligned}
F(x) = C + \sum A\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \sum D_x A'\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \sum D_x^2 A''\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La quantité $\frac{H'(x)}{H(x)}$, qui joue le rôle d'élément simple dans cette formule, n'est pas doublement périodique, mais ses dérivées le sont, comme le montre la relation

$$D_x\frac{H'(x)}{H(x)} = \frac{J}{K} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}.$$

Il en résulte que les termes de la première somme sont d'une autre nature que les autres, mais la condition $A + B + \ldots + L = 0$ permet de la mettre

aussi sous la forme doublement périodique; c'est le premier point dont je vais m'occuper.

I. J'emploierai, dans ce but, la relation suivante

$$\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x - \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} = \frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)},$$

qui est une conséquence de l'égalité fondamentale

$$-k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x+a) = \frac{\Theta'(x+a)}{\Theta(x+a)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

Changeons, en effet, $a$ en $a + i\mathrm{K}'$ : on aura d'abord

$$-\frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x+a)} = \frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)};$$

prenons ensuite la dérivée logarithmique des deux membres de l'équation

$$\operatorname{sn} a = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}(a)}{\Theta(a)},$$

ce qui donne

$$\frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} = \frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)},$$

et ajoutons membre à membre. Au moyen de la formule

$$\frac{1}{\operatorname{sn}(x+a)} = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{sn} a \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a},$$

on trouvera, après une réduction facile, la relation à établir.

D'une autre manière, en partant de la décomposition en éléments simples de la quantité $\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a}$ qui a pour périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$, nous opérerons comme il suit. Les pôles étant $x = a$, $x = 2\mathrm{K} - a$, et les résidus correspondants $\frac{1}{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}$, $-\frac{1}{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}$, nous avons d'abord

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} = \mathrm{C} + \frac{1}{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}\left[\frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} - \frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)}\right]$$

ou plutôt

$$\frac{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} = \mathrm{C}' + \frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} - \frac{\mathrm{H}'(x+a)}{\mathrm{H}(x+a)}.$$

Pour déterminer la constante, je fais $x = 0$, ce qui donne

$$-\frac{2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a} = C' - \frac{2\,H'(a)}{H(a)}$$

et, par conséquent,

$$C' = 2\left[\frac{H'(a)}{H(a)} - \frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a}\right] = 2\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

Nous avons ainsi l'égalité

$$\frac{2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a} = \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} - \frac{H'(x+a)}{H(x+a)} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)};$$

permutant $x$ et $a$, on en conclut

$$\frac{2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 x} = \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \frac{H'(x+a)}{H(x+a)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$$

et enfin, en retranchant membre à membre,

$$\frac{\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x - \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a} = \frac{H'(x+a)}{H(x+a)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

Cela posé, l'élément simple $\frac{H'(x-a)}{H(x-a)}$ s'obtient en changeant $a$ en $-a$, sous la forme suivante

$$\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} = \frac{\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x + \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a} + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)},$$

et voici la nouvelle expression des fonctions doublement périodiques qui en résulte. En premier lieu et dans la somme $\sum A\,\frac{H'(x-a)}{H(x-a)}$, le terme $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$ disparait en vertu de la condition $\sum A = 0$; on a donc simplement

$$\sum A\,\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} = \sum A\,\frac{\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x + \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 a} + \text{const.}$$

Soient ensuite, pour simplifier l'écriture,

$$S' = \sum A', \qquad S'' = \sum A'', \qquad \ldots;$$

en faisant usage de l'égalité de Jacobi

$$D_x \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \frac{J}{K} - k^2 \operatorname{sn}^2 x,$$

nous trouvons successivement

$$\sum A' \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} = \sum A' D_x \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - S' k^2 \operatorname{sn}^2 x + \text{const.},$$

$$\sum A'' \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} = \sum A'' D_x^2 \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - S'' D_x k^2 \operatorname{sn}^2 x,$$

.....................................................................

La nouvelle expression des fonctions doublement périodiques, où n'entrent plus que des éléments doublement périodiques, à savoir $\operatorname{sn}^2 x$ et sa dérivée, est donc

$$\begin{aligned} F(x) = C &+ \sum A \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} \\ &+ \sum A' D_x \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - S' k^2 \operatorname{sn}^2 x \\ &+ \sum A'' D_x^2 \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - S'' D_x k^2 \operatorname{sn}^2 x \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et l'on en conclut facilement qu'on a

$$F(x) = \varphi(\operatorname{sn}^2 x) + \psi(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$$

en désignant par $\varphi(\operatorname{sn}^2 x)$ et $\psi(\operatorname{sn}^2 x)$ des fonctions rationnelles en $\operatorname{sn}^2 x$.

Une remarque à laquelle elle donne lieu immédiatement, c'est que le second membre contient un point singulier apparent, $x = i\mathrm{K}'$, qui se trouve dans la formule

$$\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

C'est, sous ce rapport, une imperfection qui est évitée avec les éléments simples $\frac{H'(x-a)}{H(x-a)}$; nous observerons toutefois qu'il n'y a point de pôle apparent dans le cas particulier où, la fonction doublement périodique étant

paire, tous les pôles sont simples, puisque alors on obtient

$$F(x) = C + \sum \frac{A \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a}.$$

Ce cas n'est pas le seul : il en est encore de même dans d'autres circonstances où l'expression des fonctions doublement périodiques s'offre sous des formes nouvelles que nous allons indiquer.

II. A cet effet, je distingue parmi les fonctions aux périodes $2K$ et $2iK'$ celles qui se reproduisent au signe près lorsqu'on ajoute à la variable l'une des demi-périodes $iK$, $K + iK'$, $K$; je les désignerai par $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, de sorte qu'on aura ces conditions caractéristiques

$$F_1(x + iK') = -F_1(x),$$
$$F_2(x + K + iK') = -F_2(x),$$
$$F_3(x + K) = -F_3(x).$$

Considérons d'abord la première; nous pourrons écrire

$$2F_1(x) = F_1(x) - F_1(x + iK'),$$

et, en observant que l'on a

$$\frac{H'(x + iK')}{H(x + iK')} = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{i\pi}{2K},$$

la première formule de décomposition en éléments simples donne immédiatement

$$\begin{aligned} 2F_1(x) = & \sum A\left[\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} - \frac{\Theta'(x-a)}{\Theta(x-a)}\right] \\ & + \sum A' D_x \left[\frac{H'(x-a)}{H(x-a)} - \frac{\Theta'(x-a)}{\Theta(x-a)}\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$2F_1(x) = \sum A D_x \log \operatorname{sn}(x-a) + \sum A' D_x^2 \log \operatorname{sn}(x-a) + \ldots$$

ou, plus simplement,

$$F_1(x) = \sum A D_x \log \operatorname{sn}(x-a) + \sum A' D_x^2 \log \operatorname{sn}(x-a) + \ldots.$$

si l'on n'emploie que les pôles contenus dans le rectangle ayant pour côtés $2K$ et $K'$.

De la même manière, en faisant usage des équations,

$$\frac{H'(x+K+iK')}{H(x+K+iK')} = \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} - \frac{i\pi}{2K},$$

$$\frac{H'(x+K)}{H(x+K)} = \frac{H'_1(x)}{H_1(x)},$$

nous trouverons ensuite

$$2F_2(x) = \sum A_1 D_x \log \frac{\operatorname{sn}(x-a')}{\operatorname{dn}(x-a')} + \sum A'_1 D_x^2 \log \frac{\operatorname{sn}(x-a')}{\operatorname{dn}(x-a')} + \ldots,$$

$$2F_3(x) = \sum A_2 D_x \log \frac{\operatorname{sn}(x-a'')}{\operatorname{cn}(x-a'')} + \sum A'_2 D_x^2 \log \frac{\operatorname{sn}(x-a'')}{\operatorname{cn}(x-a'')} + \ldots.$$

Ces quantités prennent une forme plus simple, si l'on change dans la première $x$ en $x+K$, et dans la seconde $x$ en $x+K+iK'$. Nous avons, en effet,

$$\frac{\operatorname{sn}(x+K)}{\operatorname{dn}(x+K)} = \frac{1}{k'}\operatorname{cn} x,$$

$$\frac{\operatorname{sn}(x+K+iK')}{\operatorname{cn}(x+K+iK')} = \frac{i}{k'}\operatorname{dn} x;$$

en écrivant donc

$$F_2(x) \quad \text{et} \quad F_3(x),$$

au lieu de

$$2F_2(x+K) \quad \text{et} \quad 2F_3(x+K+iK'),$$

on obtient ainsi les formules

$$F_2(x) = \sum A_1 D_x \log \operatorname{cn}(x-a') + \sum A'_1 D_x^2 \log \operatorname{cn}(x-a') + \ldots,$$

$$F_3(x) = \sum A_2 D_x \log \operatorname{dn}(x-a'') + \sum A'_2 D_x^2 \log \operatorname{dn}(x-a'') + \ldots.$$

Les expressions des fonctions $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$, auxquelles nous venons de parvenir, ont pour éléments simples les fonctions doublement périodiques

$$D_x \log \operatorname{sn} x = \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x},$$

$$D_x \log \operatorname{cn} x = -\frac{\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{cn} x},$$

$$D_x \log \operatorname{dn} x = -k^2 \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x},$$



et ne présentent pas de pôle apparent; voici quelques remarques auxquelles elles donnent lieu ([1]).

III. L'expression, par une somme d'éléments simples, des fonctions rationnelles et des fonctions doublement périodiques, donne immédiatement leurs intégrales; on obtient ainsi pour les fonctions doublement périodiques les plus générales, désignées précédemment par $F(x)$,

$$\int F(x)\,dx = Cx + \sum A \log H(x-a) + \sum A' \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \ldots,$$

puis les formules, auxquelles je m'arrêterai un instant,

$$\int F_1(x)\,dx = \sum A \log \operatorname{sn}(x-a) + \sum A' D_x \log \operatorname{sn}(x-a) + \ldots.$$

$$\int F_2(x)\,dx = \sum A_1 \log \operatorname{cn}(x-a') + \sum A'_1 D_x \log \operatorname{cn}(x-a') + \ldots.$$

$$\int F_3(x)\,dx = \sum A_2 \log \operatorname{dn}(x-a'') + \sum A'_2 D_x \log \operatorname{dn}(x-a'') + \ldots.$$

Soit pour un instant $\operatorname{sn} x = \xi$ et $R(\xi) = (1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)$, on aura

$$F_1(x) = f_1[\xi, \sqrt{R(\xi)}],$$
$$F_2(x) = f_2[\xi, \sqrt{R(\xi)}],$$
$$F_3(x) = f_3[\xi, \sqrt{R(\xi)}],$$

en représentant par $f_1, f_2, f_3$ des expressions rationnelles en $\xi$ et $\sqrt{R(\xi)}$: cela étant, on voit que les intégrales

$$\int \frac{f_1[\xi, \sqrt{R(\xi)}]}{\sqrt{R(\xi)}}\,d\xi, \qquad \int \frac{f_2[\xi, \sqrt{R(\xi)}]}{\sqrt{R(\xi)}}\,d\xi, \qquad \int \frac{f_3[\xi, \sqrt{R(\xi)}]}{\sqrt{R(\xi)}}\,d\xi$$

s'expriment sous forme finie explicite, par les fonctions élémentaires. Soit, de plus,

$$f[\xi, \sqrt{R(\xi)}] = f_1[\xi, \sqrt{R(\xi)}] + f_2[\xi, \sqrt{R(\xi)}] + f_3[\xi, \sqrt{R(\xi)}],$$

---

([1]) Dans une Note du *Journal de Liouville*, sur une formule d'Euler, année 1879, je suis arrivé, par une autre méthode, à ces mêmes formules.

il en sera de même de la quantité

$$J = \int \frac{f[\xi, \sqrt{R(\xi)}]}{\sqrt{R(\xi)}} d\xi,$$

de sorte qu'on a ainsi un type des intégrales qui ont été nommées *pseudo-elliptiques*. Revenons maintenant à la variable $x$, et posons, pour abréger,

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x),$$

ce qui permet d'écrire

$$J = \int F(x)\,dx,$$

il est facile d'établir la relation

$$F(x) + F(x + iK') + F(x + K + iK') + F(x + K) = 0.$$

Considérons, en effet, les quatre termes qui dépendent de la même fonction, par exemple $F_1(x)$ : ils donnent la somme

$$F_1(x) + F_1(x + iK') + F_1(x + K + iK') + F_1(x + K);$$

or on voit immédiatement qu'elle est nulle en vertu de l'égalité

$$F_1(x) + F_1(x + iK') = 0,$$

et il est clair qu'on a de même

$$F_2(x) + F_2(x + iK') + F_2(x + K + iK') + F_2(x + K) = 0,$$
$$F_3(x) + F_3(x + iK') + F_3(x + K + iK') + F_3(x + K) = 0.$$

J'ajoute maintenant que toute fonction doublement périodique $F(x)$ qui satisfait à cette condition, pouvant s'écrire de la manière suivante,

$$\begin{aligned} 4F(x) = {} & F(x) - F(x + iK') \\ & + F(x) - F(x + K + iK') \\ & + F(x) - F(x + K), \end{aligned}$$

on en conclut cette expression

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) + F_3(x).$$

Effectivement les différences

$$F(x) - F(x + iK'), \quad F(x) - F(x + K + iK') \quad \text{et} \quad F(x) - F(x + K)$$

offrent les propriétés caractéristiques de $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$; elles se reproduisent changées de signe, en y remplaçant successivement $x$ par $x+iK'$, $x+K+iK'$ et $x+K$. Il en résulte que la transformée par la substitution $\operatorname{sn} x = \xi$ de l'intégrale $\int F(x)\,dx$, c'est-à-dire $J = \int \frac{f[\xi, \sqrt{R(\xi)}]}{\sqrt{R(\xi)}}\,d\xi$, s'obtient sous une forme finie explicite au moyen des fonctions élémentaires, et représente une intégrale pseudo-elliptique. Je remarque encore qu'ayant pour la fonction doublement périodique $F(x)$ cette expression

$$F(x) = \varphi(\operatorname{sn}^2 x) + \psi(\operatorname{sn}^2 x)\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$$

où $\varphi$ et $\psi$ désignent des fonctions rationnelles, on en conclut

$$f[\xi, \sqrt{R(\xi)}] = \varphi(\xi^2) + \psi(\xi^2)\xi\sqrt{R(\xi)},$$

de sorte que l'intégrale J se décompose en deux parties, dont la première $\int \frac{\varphi(\xi^2)\,d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}$ est seule à considérer. Cela étant, je dis que la fonction $\varphi(\xi^2)$ vérifie la relation

$$\varphi(\xi^2) + \varphi\left(\frac{1}{k^2\xi^2}\right) + \varphi\left(\frac{1-k^2\xi^2}{k^2-k^2\xi^2}\right) + \varphi\left(\frac{1-\xi^2}{1-k^2\xi^2}\right) = 0.$$

Changeons, en effet, $x$ en $-x$, dans l'égalité

$$F(x) + F(x+iK') + F(x+K+iK') + F(x+K) = 0,$$

on obtiendra, eu égard à la périodicité, l'équation

$$F(-x) + F(-x-iK') + F(-x-K-iK') + F(-x-K) = 0,$$

et, en ajoutant membre à membre, on conclut que la partie paire de $F(x)$, c'est-à-dire $\varphi(\operatorname{sn}^2 x)$, satisfait à la même condition que la fonction elle-même. Cela étant, la proposition énoncée est la conséquence des relations élémentaires

$$\operatorname{sn}^2(x+iK') = \frac{1}{k^2\operatorname{sn}^2 x}, \quad \operatorname{sn}^2(x+K+iK') = \frac{\operatorname{dn}^2 x}{k^2\operatorname{cn}^2 x}, \quad \operatorname{sn}^2(x+K) = \frac{\operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x}.$$

C'est M. Goursat qui a donné ce résultat, dans un beau travail intitulé *Note sur quelques intégrales pseudo-elliptiques*, dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV, 1887. Je renvoie aussi sur la

même question à d'excellentes recherches qu'a publiées M. Raffy dans le même Recueil, t. XII, p. 51; la méthode des deux auteurs, qui n'empruntent rien à la théorie des fonctions doublement périodiques, étant entièrement différente de celle que j'ai suivie.

IV. Je considérerai maintenant les fonctions $\Phi(x)$ aux périodes $4K$ et $4iK'$, pour montrer succinctement comment elles se décomposent en éléments simples, qui sont encore formés au moyen des quantités $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$; voici, dans ce but, une première remarque.

Soient, pour un moment,

$$2\Pi(x) = \Phi(x) + \Phi(x + 2iK'),$$
$$2\Pi_1(x) = \Phi(x) - \Phi(x + 2iK'),$$

on aura les égalités

$$\Pi(x + 2iK') = +\Pi(x),$$
$$\Pi_1(x + 2iK') = -\Pi(x),$$

et l'on en conclut que la fonction proposée $\Phi(x)$ s'exprime par la somme de deux autres dont la première se reproduit et la seconde change de signe quand on ajoute $2iK'$ à la variable.

Posons ensuite

$$2\Phi_0(x) = \Pi(x) + \Pi(x + 2K),$$
$$2\Phi_1(x) = \Pi(x) - \Pi(x + 2K)$$

et semblablement

$$2\Phi_2(x) = \Pi_1(x) - \Pi_1(x + 2K),$$
$$2\Phi_3(x) = \Pi_1(x) + \Pi_1(x + 2K);$$

nous en déduirons cette expression

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \Phi_1(x) + \Phi_2(x) + \Phi_3(x),$$

où les termes du second membre satisfont aux conditions suivantes :

$$\Phi_0(x + 2K) = +\Phi_0(x), \qquad \Phi_0(x + 2iK') = +\Phi_0(x),$$
$$\Phi_1(x + 2K) = -\Phi_1(x), \qquad \Phi_1(x + 2iK') = +\Phi_1(x),$$
$$\Phi_2(x + 2K) = -\Phi_2(x), \qquad \Phi_2(x + 2iK') = -\Phi_2(x),$$
$$\Phi_2(x + 2K) = +\Phi_3(x), \qquad \Phi_3(x + 2iK') = -\Phi_3(x).$$

Elles montrent que $\Phi_0(x)$ revient à $F(x)$; on voit aussi que $\Phi_1(x), \Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$ peuvent être considérées comme des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, ayant respectivement les mêmes multiplicateurs que $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, qui leur serviront d'éléments simples. Nous avons donc, en premier lieu,

$$\begin{aligned}\Phi_0(x) = C &+ \sum A \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a}\\ &+ \sum A' D_x \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - S' k^2 \operatorname{sn}^2 x\\ &+ \sum A'' D_x^2 \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a} - S'' D_x k^2 \operatorname{sn}^2 x\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;\end{aligned}$$

puis, en représentant les pôles par $a' + iK'$, $a'' + iK'$, $a''' + iK'$, ...,

$$\Phi_1(x) = \sum A_1 \operatorname{sn}(x - a') + \sum A'_1 D_x \operatorname{sn}(x - a') + \ldots,$$

$$\Phi_2(x) = \sum A_2 \operatorname{cn}(x - a'') + \sum A'_2 D_x \operatorname{cn}(x - a'') + \ldots,$$

$$\Phi_3(x) = \sum A_3 \operatorname{dn}(x - a''') + \sum A'_3 D_x \operatorname{dn}(x - a''') + \ldots.$$

Cela posé, à la formule précédemment donnée pour $\Phi_0(x)$, à savoir

$$\Phi_0(x) = \varphi(\operatorname{sn}^2 x) + \psi(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$$

nous ajouterons les suivantes, dans lesquelles les lettres $\varphi$ et $\psi$ désignent des fonctions rationnelles :

$$\begin{aligned}\Phi_1(x) &= \varphi_1(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn} x + \psi_1(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,\\ \Phi_2(x) &= \varphi_2(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{cn} x + \psi_2(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn} x \operatorname{dn} x,\\ \Phi_3(x) &= \varphi_3(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{dn} x + \psi_3(\operatorname{sn}^2 x) \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x.\end{aligned}$$

On les obtient au moyen des relations élémentaires pour l'addition des arguments dans les éléments simples $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, ou encore en remarquant que les produits $\Phi_1(x) \operatorname{sn} x$, $\Phi_2(x) \operatorname{cn} x$, $\Phi_3(x) \operatorname{dn} x$ ont pour périodes $2K$ et $2iK'$, et rentrent, par conséquent, dans le type analytique de $\Phi_0(x)$.

Ces résultats montrent que $\Phi(x)$, c'est-à-dire toute fonction uniforme dont les périodes sont $4K$ et $4iK'$, s'exprime en fonction rationnelle de

$\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$ et $\mathrm{dn}\,x$. J'indiquerai comme exemple les formules suivantes :

$$\mathrm{sn}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\mathrm{cn}\,x}{1+\mathrm{dn}\,x}, \qquad \mathrm{sn}^2\left(\frac{x}{2}+\mathrm{K}\right) = \frac{1+\mathrm{cn}\,x}{1+\mathrm{dn}\,x},$$

$$\mathrm{sn}^2\left(\frac{x}{2}+i\mathrm{K}'\right) = \frac{1+\mathrm{cn}\,x}{1-\mathrm{dn}\,x}, \qquad \mathrm{sn}^2\left(\frac{x}{2}+\mathrm{K}+i\mathrm{K}'\right) = \frac{1-\mathrm{cn}\,x}{1-\mathrm{dn}\,x}.$$

Je remarquerai aussi que, en posant

$$\Psi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x) + \Phi_3(x),$$

ce qui donne

$$\Phi(x) = \Phi_0(x) + \Psi(x),$$

on a la relation

$$\Psi(x) + \Psi(x+2i\mathrm{K}') + \Psi(x+2\mathrm{K}+2i\mathrm{K}') + \Psi(x+2\mathrm{K}) = 0,$$

et qu'on peut en conclure l'expression de la fonction $\Psi(x)$.

Soient, en effet, pour un moment,

$$\begin{aligned} 2\Psi_1(x) &= \Psi(x) + \Psi(x+2i\mathrm{K}'),\\ 2\Psi_2(x) &= \Psi(x) + \Psi(x+2\mathrm{K}+2i\mathrm{K}'),\\ 2\Psi_3(x) &= \Psi(x) + \Psi(x+2\mathrm{K}); \end{aligned}$$

nous obtenons d'abord, d'après l'égalité admise,

$$\Psi(x) = \Psi_1(x) + \Psi_2(x) + \Psi_3(x).$$

Cela étant, on trouve ensuite, en ayant égard à cette même relation ainsi qu'à la périodicité de $\Psi(x)$,

$$\begin{aligned} \Psi_1(x+2\mathrm{K}) &= -\Psi_1(x),\\ \Psi_2(x+2\mathrm{K}) &= -\Psi_2(x),\\ \Psi_3(x+2\mathrm{K}) &= +\Psi_3(x), \end{aligned}$$

et pareillement

$$\begin{aligned} \Psi_1(x+2i\mathrm{K}') &= +\Psi_1(x),\\ \Psi^2(x+2i\mathrm{K}') &= +\Psi_2(x),\\ \Psi_3(x+2i\mathrm{K}') &= -\Psi_3(x). \end{aligned}$$

On voit donc que les fonctions $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, $\Psi_3(x)$ possèdent les propriétés caractéristiques de $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$, ce qui démontre le résultat annoncé.

SUR UNE

# ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU SECOND ORDRE

QUI JOUE UN RÔLE IMPORTANT

# DANS LA MÉCANIQUE CÉLESTE;

PAR M. F. TISSERAND.

## PREMIÈRE PARTIE.

1. Il s'agit de l'équation

$$(a)\qquad \frac{d^2z}{dv^2} + z[n^2 + 2\alpha\cos(lv + b)] = U,$$

où l'on a

$$(b)\qquad U = \sum_i A_i \cos V_i, \qquad V_i = l_i v + b_i;$$

$n$, $\alpha$, $l$, $b$, $A_i$, $l_i$ et $b_i$ sont des constantes données : c'est donc une équation différentielle linéaire, à coefficients variables, avec second membre; elle a été rencontrée il y a longtemps par d'Alembert, à propos de la théorie de la Lune (*Opuscules*, t. V, p. 336), et par Lagrange (*Œuvres*, t. I, p. 586). La même équation a été étudiée à divers points de vue, dans ces dernières années, par MM. Bruns, Callandreau, Gyldén, Heine, Hill, Lindemann, Lindstedt, Mathieu, Poincaré, Stieltjes, etc.

M. Hill a fait des travaux très remarquables sur l'équation plus générale

$$\frac{d^2z}{dv^2} + z[n^2 + 2\alpha\cos(lv + b) + 2\beta\cos(2lv + 2b) + \ldots] = U.$$

Mais, dans ce Mémoire, nous ne nous occuperons que des recherches de MM. Gyldén et Lindstedt.

La méthode de M. Lindstedt est très simple et donne le développement

de l'intégrale générale de l'équation ($a$) à l'aide des séries trigonométriques.

Celle de M. Gyldén est plus savante ; elle utilise en effet les beaux travaux de M. Hermite sur l'intégration de l'équation de Lamé au moyen des fonctions elliptiques. L'éminent directeur de l'observatoire de Stockholm a fait une application importante de ses formules à la détermination de l'orbite intermédiaire de la Lune ; les principes de son analyse, dans ce dernier problème, ont été clairement exposés dans ce Recueil même (t. I) par M. Andoyer. En dernier lieu, on est bien obligé de remplacer les fonctions elliptiques par leurs développements trigonométriques. On doit évidemment retomber sur les formules auxquelles conduit la méthode élémentaire de M. Lindstedt. C'est à la comparaison de ces deux théories que je vais m'appliquer, et je m'occuperai surtout de l'application à la théorie de la Lune, en suivant les calculs sous la forme employée par M. Andoyer. Pour être bien compris, je devrai forcément reprendre, mais aussi brièvement que possible, l'exposition des deux méthodes, en y ajoutant quelques compléments qui ne me semblent pas inutiles.

II. Négligeons d'abord le second membre de l'équation ($a$) ; par un changement de variable très simple, nous aurons l'équation

$$\text{(A)} \qquad \frac{d^2 z}{dv^2} + z(a_0^2 + 2a_1 \cos 2v) = 0;$$

nous admettrons que $a_1$ est un coefficient numérique petit dont on pourra négliger les puissances à partir d'un rang peu élevé : c'est là la circonstance qui facilite les approximations.

En adoptant l'exposition de la méthode de M. Lindstedt, telle qu'elle a été présentée par M. Poincaré, nous allons prouver qu'en posant

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} z = z_0 + a_1 z_1 + a_1^2 z_2 + \ldots + a_1^p z_p, \\ \mu = a_0 + a_1 \mu_1 + a_1^2 \mu_2 + \ldots + a_1^p \mu_p \quad (\text{on a pris } \mu_0 = a_0), \\ w = \mu v + \psi \quad (\psi \text{ désigne une constante arbitraire}), \end{cases}$$

on peut déterminer les quantités $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$, et les $p+1$ fonctions $z_0$, $z_1, \ldots, z_p$ des arguments $v$ et $w$, de telle sorte qu'en substituant la valeur ci-dessus de $z$ dans l'équation (A), elle y laisse un résidu de l'ordre de $a_1^{p+1}$ ; les quantités $\mu_i$ dépendront uniquement de $a_0$. On prendra pour les fonc-

tions $z_i$ des expressions de cette forme

$$(2) \qquad z_i = \sum_{h=-i}^{h=+i} B_i^{(h)} \cos(w + 2hv) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, p),$$

où les coefficients B seront des fonctions de $a_0$ qu'il s'agira de déterminer.

$z_i$ contiendra $v$ explicitement et implicitement par $w$, dont la définition est donnée par la dernière des formules (1).

On aura donc

$$\frac{d^2 z_i}{dv^2} = \frac{\partial^2 z_i}{\partial v^2} + 2\mu \frac{\partial^2 z_i}{\partial v \partial w} + \mu^2 \frac{\partial^2 z_i}{\partial w^2},$$

$$\frac{d^2 z}{dw^2} = \sum_{i=0}^{i=p} a_1^i \frac{d^2 z_i}{dw^2}.$$

Si l'on pose

$$(3) \qquad \mu^2 = a_0^2 + C_1 a_1 + C_2 a_1^2 + C_3 a_1^3 + \ldots,$$

les coefficients $C_1$, $C_2$, ... seront des polynômes en $\mu_1$, $\mu_2$, ... que l'on calculera aisément en partant de la seconde des formules (1).

Cela posé, si l'on substitue dans (A) les valeurs de $z$, $\frac{d^2 z}{dv^2}$, $\mu$ et $\mu^2$ déterminées comme on vient de le dire, on trouvera un résultat de la forme

$$R_0 + R_1 a_1 + R_2 a_1^2 + \ldots + R_p a_1^p + \ldots = 0;$$

on écrira les équations

$$R_0 = R_2 = R_1 = \ldots = R_p = 0,$$

de telle sorte que le résidu de la substitution sera

$$R_{p+1} a_1^{p+1} + R_{p+2} a_1^{p+2} + \ldots,$$

et contiendra en facteur $a_1^{p+1}$, quantité de l'ordre $p + 1$.

On trouve sans peine que l'équation générale $R_i = 0$ peut s'écrire

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial^2 z_i}{\partial v^2} + 2a_0 \frac{\partial^2 z_i}{\partial v \partial w} + \mathcal{R}_i = 0,$$

en faisant

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A}_i = 2\left(\mu_1 \frac{\partial^2 z_{i-1}}{\partial v\,\partial w} + \mu_2 \frac{\partial^2 z_{i-2}}{\partial v\,\partial w} + \ldots + \mu_{i-1} \frac{\partial^2 z_1}{\partial v\,\partial w} + \mu_i \frac{\partial^2 z_0}{\partial v\,\partial w}\right) \\ + C_1 \frac{\partial^2 z_{i-1}}{\partial w^2} + C_2 \frac{\partial^2 z_{i-2}}{\partial w^2} + \ldots + C_{i-1} \frac{\partial^2 z_1}{\partial w^2} + C_i \frac{\partial^2 z_0}{\partial w^2} \\ + 2 z_{i-1} \cos 2v. \end{aligned}\right.$$

On remarquera que la quantité $\mathfrak{A}_i$ ne dépend que de $z_{i-1}, z_{i-2}, \ldots, z_0$; on pourra donc déterminer de proche en proche les fonctions $z_i$ en partant de leurs expressions générales (2) et de l'équation de condition ($\alpha$).

Supposons que, par ce calcul, on soit arrivé à une expression de cette forme

$$(4)\qquad \mathfrak{A}_i = \sum_{h=-i}^{h=+i} D_i^{(h)} \cos(w + 2hv).$$

Si l'on substitue dans ($\alpha$) les valeurs (2) et (4) de $z_i$ et $\mathfrak{A}_i$, on trouvera

$$\sum_{h=-i}^{h=+i} [4h(h+a_0) B_i^{(h)} - D_i^{(h)}] \cos(w + 2hv) = 0.$$

Nous vérifierons donc l'équation ($\alpha$) en prenant

$$(c)\qquad B_i^{(h)} = \frac{D_i^{(h)}}{4h(h+a_0)},$$

et cette valeur de $B_i^{(h)}$ sera admissible, sauf le cas de $h = 0$. En se reportant à la formule (4), on voit que $\mathfrak{A}_i$ ne doit pas contenir de terme où l'argument soit égal à $w$ seul. On devra donc avoir les équations

$$(5)\qquad D_1^{(0)} = 0, \qquad D_2^{(0)} = 0, \qquad \ldots, \qquad D_p^{(0)} = 0,$$

et ce sont ces équations qui détermineront $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$; après quoi, les formules (2) et ($c$) détermineront les quantités $z_i$.

Nous prendrons

$$(6)\qquad z_0 = \cos w,$$

expression qui vérifie bien l'équation (A) lorsque $a_1$ est nul;

($\beta$) nous donnera, à cause de $C_1 = a_0 \mu_1$,

$$\mathfrak{A}_1 = -2 a_0 \mu_1 \cos w + \cos(w + 2v) + \cos(w - 2v).$$

On devra donc avoir $\mu_1 = 0$; on aura ensuite

$$D_1^{(1)} = +1, \qquad D_1^{(-1)} = +1,$$

d'où, par ($e$),

$$B_1^{(1)} = \frac{1}{4(1+a_0)}, \qquad B_1^{(-1)} = \frac{1}{4(1-a_0)};$$

$$(7) \qquad z_1 = \frac{\cos(w+2v)}{4(1+a_0)} + \frac{\cos(w-2v)}{4(1-a_0)}.$$

Avec les valeurs (6) et (7) de $z_0$ et $z_1$, $\mu_1 = 0$, on tire de ($\beta$)

$$\mathfrak{A}_2 = C_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial w^2} + C_2 \frac{\partial^2 z_0}{\partial w^2} + 2 z_1 \cos 2v = 2\mu_2 a_0 \frac{\partial^2 z_0}{\partial w^2} + 2 z_1 \cos 2v,$$

d'où

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{\cos(w+4v)}{4(1+a_0)} + \frac{\cos(w-4v)}{4(1-a_0)} + \left[\frac{1}{4(1+a_0)} + \frac{1}{4(1-a_0)} - 2\mu_2 a_0\right] \cos w;$$

le coefficient de $w$ doit disparaître : on en conclut

$$\mu_2 = \frac{1}{4a_0(1-a_0^2)}.$$

On trouve ensuite, en opérant de même,

$$\mu_3 = 0, \qquad \mu_4 = \frac{-15a_0^4 + 35a_0^2 - 8}{64a_0^3(1-a_0^2)^3(4-a_0^2)};$$

et l'on a cette solution, dans laquelle nous introduisons un facteur constant $\eta_0$, qui, avec $\psi$, donnera les deux constantes voulues,

$$(B) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu &= a_0\left[1 + \frac{a_1^2}{4a_0^2(1-a_0^2)} + a_1^3 \times 0\right], \\ w &= \psi + \mu v, \\ z &= \eta_0 \cos w + \frac{a_1}{4(1+a_0)} \eta_0 \cos(w+2v) + \frac{a_1}{4(1-a_0)} \eta_0 \cos(w-2v) \\ &\quad + \frac{a_1^2}{32(1+a_0)(3+a_0)} \eta_0 \cos(w+4v) + \frac{a_1^2}{32(1-a_0)(2-a_0)} \eta_0 \cos(w-4v) \\ &\quad + \frac{a_1^3}{384(1+a_0)(2+a_0)(3+a_0)} \eta_0 \cos(w+6v) \\ &\quad - a_1^3 \frac{a_0^3 + 4a_0^2 + 15a_0 + 16}{128a_0(1-a_0^2)(1+a_0)^2(2+a_0)} \eta_0 \cos(w+2v) \\ &\quad - a_1^3 \frac{a_0^3 - 4a_0^2 + 15a_0 - 16}{128a_0(1-a_0^2)(1-a_0)^2(2-a_0)} \eta_0 \cos(w-2v) \\ &\quad + \frac{a_1^3}{384(1-a_0)(2-a_0)(3-a_0)} \eta_0 \cos(w-6v). \end{aligned} \right.$$

Cette solution, transportée dans l'équation (A), y laissera un résidu du quatrième ordre.

On démontre aisément, de proche en proche, que $z_i$ ne contiendra que les arguments $w \pm 2iv$, $w \pm (2i-4)v$, ..., l'argument $w$ étant excepté lorsque $i$ est pair.

Il importe de voir qu'on ne rencontrera jamais d'impossibilité dans le calcul des quantités $\mu_i$ d'après les équations (5). Supposons, en effet, que l'on ait trouvé

$$\mu_1 = 0, \qquad \mu_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad \mu_{2i-1} = 0;$$

il en résulte

$$C_1 = 0, \qquad C_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad C_{2i-1} = 0;$$

les équations $D^{(0)}_{2i} = 0$ et $D^{(0)}_{2i+1} = 0$ donneront, comme on le voit aisément,

$$C_{2i} = B^{(1)}_{2i-1} + B^{(-1)}_{2i-1},$$

$$C_{2i+1} = B^{(1)}_{2i} + B^{(-1)}_{2i} = 0.$$

Or on a

$$C_{2i} = 2a_0\mu_{2i} + 2\mu_2\mu_{2i-2} + \ldots$$

(le coefficient 2 du dernier terme devant être remplacé par 1 si $i$ est pair) et

$$C_{2i+1} = 2a_0\mu_{2i+1};$$

on aura donc

$$\mu_{2i+1} = 0,$$

$$2a_0\mu_{2i} = B^{(1)}_{2i-1} + B^{(-1)}_{2i-1} - 2\mu_2\mu_{2i-2} - 2\mu_4\mu_{2i-4} - \ldots.$$

La valeur trouvée pour $\mu_{2i}$ sera toujours admissible.

On voit en même temps que $\mu$ est une fonction paire de $a_1$.

III. Il faut maintenant rétablir le second membre dans l'équation (A). On trouvera l'intégrale générale de la nouvelle équation en conservant pour $z$ l'expression analytique (B), et faisant varier les constantes $\gamma_0$ et $\psi$ suivant la méthode bien connue. Je vais donner la formule à laquelle on arrive ainsi, mais je le ferai en prenant l'équation sous la forme ($a$), ce qui sera plus commode pour les applications.

Soient

$$(d) \qquad \begin{cases} w = \mu v + \psi, \\ \mu = n\left[1 + \dfrac{\alpha^2}{n^2(l^2-4n^2)} + \alpha^4\dfrac{-2l^4+35l^2n^2-60n^4}{4n^4(l^2-n^2)(l^2-4n^2)^3} + \ldots\right]; \end{cases}$$

l'intégrale générale de l'équation ($a$) sera, en négligeant $\alpha^3$,

$$(e)\left\{\begin{aligned}
z = {} & \eta_0 \cos w + \frac{\alpha}{l}\left[\frac{1}{l+2n}\eta_0\cos(w+lv+b) + \frac{1}{l-2n}\eta_0\cos(w-lv-b)\right] \\
& + \frac{\alpha^2}{4l^2}\left[\frac{1}{(l+n)(l+2n)}\eta_0\cos(w+2lv+2b) + \frac{1}{(l-n)(l-2n)}\eta_0\cos(w-2lv-2b)\right] \\
& + \frac{1}{2n}\sum A_i\cos V_i\left\{\left(\frac{1}{\mu+l_i}+\frac{1}{\mu-l_i}\right)\left[1-\alpha^2\frac{l^4-10l^2n^2+8n^4}{l^2n^2(l^2-4n^2)^2}\right]\right. \\
& \qquad + \frac{\alpha^2}{l^2(l+2n)^2}\left(\frac{1}{\mu+l+l_i}+\frac{1}{\mu+l-l_i}\right) \\
& \qquad \left. + \frac{\alpha^2}{l^2(l-2n)^2}\left(\frac{1}{\mu-l+l_i}+\frac{1}{\mu-l-l_i}\right)\right\} \\
& + \frac{\alpha}{2nl}\sum A_i\cos(V_i+lv+b)\left[\frac{1}{l+2n}\left(\frac{1}{\mu+l+l_i}+\frac{1}{\mu-l_i}\right)\right. \\
& \qquad \left. + \frac{1}{l-2n}\left(\frac{1}{\mu-l-l_i}+\frac{1}{\mu+l_i}\right)\right] \\
& + \frac{\alpha}{2nl}\sum A_i\cos(V_i-lv-b)\left[\frac{1}{l+2n}\left(\frac{1}{\mu+l-l_i}+\frac{1}{\mu+l_i}\right)\right. \\
& \qquad \left. + \frac{1}{l-2n}\left(\frac{1}{\mu-l+l_i}+\frac{1}{\mu-l_i}\right)\right] \\
& + \frac{\alpha^2}{8nl^2}\sum A_i\cos(V_i+2lv+2b)\left[\frac{1}{(l+n)(l+2n)}\left(\frac{1}{\mu+2l+l_i}+\frac{1}{\mu-l_i}\right)\right. \\
& \qquad + \frac{1}{(l-n)(l-2n)}\left(\frac{1}{\mu-2l-l_i}+\frac{1}{\mu+l_i}\right) \\
& \qquad \left. + \frac{4}{l^2-4n^2}\left(\frac{1}{\mu+l+l_i}+\frac{1}{\mu-l-l_i}\right)\right] \\
& + \frac{\alpha^2}{8nl^2}\sum A_i\cos(V_i-2lv-2b)\left[\frac{1}{(l+n)(l+2n)}\left(\frac{1}{\mu+2l-l_i}+\frac{1}{\mu+l_i}\right)\right. \\
& \qquad + \frac{1}{(l-n)(l-2n)}\left(\frac{1}{\mu-2l+l_i}+\frac{1}{\mu-l_i}\right) \\
& \qquad \left. + \frac{4}{l^2-4n^2}\left(\frac{1}{\mu+l-l_i}+\frac{1}{\mu-l+l_i}\right)\right].
\end{aligned}\right.$$

IV. *Calcul approché de la latitude de la Lune.* — Soient

$v$ la longitude de la Lune, comptée sur le plan de l'écliptique supposé fixe;
$s$ la tangente de sa latitude;
$m$ le rapport des moyens mouvements du Soleil et de la Lune;
$\sigma$ une constante.

On a (Andoyer, *loc. cit.*), en négligeant les petites quantités du quatrième

ordre,

$$(C)\quad \frac{d^2 s}{dv^2} - \tfrac{3}{2} m^2 \sin[(2-2m)v - 2\sigma] \frac{ds}{dv} + s\{1 + \tfrac{3}{2} m^2 - \tfrac{3}{2} m^2 \cos[(2-2m)v - 2\sigma]\} = 0.$$

On peut se convaincre aisément, en se reportant à la manière dont cette équation a été établie, que la portion $1 + \frac{3}{2} m^2$ du coefficient de $s$ est exacte au troisième ordre près inclusivement, relativement à $m$.

L'équation $(C)$ est une équation différentielle linéaire à coefficients périodiques et sans second membre; nous la ramènerons au type $(a)$ en changeant de variable et posant

$$(8)\qquad s = z\,\mathrm{E}^{\frac{3}{4} m^2 \int \sin[(2-2m)v - 2\sigma]\, dv};$$

on trouve, avec la même précision,

$$(9)\qquad \frac{d^2 z}{dv^2} + z\{1 + \tfrac{3}{2} m^2 + 3 m^2 \cos[(2-2m)v - 2\sigma]\} = 0.$$

La remarque faite ci-dessus s'applique à la portion $1 + \frac{3}{2} m^2$ du coefficient de $z$, qui est la même que dans le coefficient de $s$.

Pour faire coïncider l'équation (9) avec $(a)$, il suffit de poser

$$n^2 = 1 + \tfrac{3}{2} m^2, \qquad \alpha = \tfrac{3}{2} m^2, \qquad l = 2(1-m), \qquad b = -\sigma;$$

d'où

$$n = 1 + \tfrac{3}{4} m^2 + \text{des termes en } m^4, m^5, \ldots,$$

$$l - 2n = -2m(1 + \ldots), \qquad l^2 - 4n^2 = -8m(1 + \ldots).$$

Les diviseurs $l - 2n$ et $l^2 - 4n^2$ sont petits et, par suite, importants à considérer; la formule $(d)$, réduite à

$$z = \eta_0 \cos w + \frac{\alpha}{l(l+2n)} \eta_0 \cos(w + lv + b) + \frac{\alpha}{l(l-2n)} \eta_0 \cos(w - lv - b),$$

$$w = \mu v + \beta,$$

$$\mu = n\left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2(l^2 - 4n^2)}\right],$$

nous donnera

$$\mu = n(1 - \tfrac{9}{32} m^3 + \ldots) = 1 + \tfrac{3}{4} m^2 - \tfrac{9}{32} m^3 + \ldots,$$

$$z = \eta_0 \cos w + \tfrac{3}{16} m^2 \eta_0 \cos[w + (2-2m)v - 2\sigma] - \tfrac{3}{8} m \eta_0 \cos[w - (2-2m)v + 2\sigma].$$

Le coefficient du dernier terme du second membre étant du second ordre par les facteurs $m$ et $\eta_0$, il convient de supprimer le terme précédent, qui est du troisième ordre, à cause de $m^2\eta_0$; nous ferons en même temps

$$\eta_0 = \varkappa, \qquad \psi = -90^\circ - \gamma, \qquad \mu = g,$$

et nous aurons

$$z = \varkappa \sin(gv - \gamma) + \tfrac{3}{8} m\varkappa \sin[(2 - g - 2m)v - 2\sigma + \gamma].$$

La formule (8) donne, avec la même approximation, $s = z$.

Voici donc le résultat auquel nous arrivons :

$$\text{(D)} \qquad g = 1 + \tfrac{3}{4} m^2 - \tfrac{9}{32} m^3,$$

$$\text{(E)} \qquad s = \varkappa \sin(gv - \gamma) + \tfrac{3}{8} m\varkappa \sin[(2 - g - 2m)v - 2\sigma + \gamma].$$

Les coefficients de $m^2$ et $m^3$ dans (D) sont exacts, comme on le voit en comparant avec les valeurs trouvées pour $g$ dans les diverses théories de la Lune; on connaît ainsi le mouvement moyen du nœud à $\frac{1}{50}$ environ de sa valeur près.

L'expression (E) de $s$ contient tous les termes du second ordre.

V. *Calcul approché de la projection du rayon vecteur de la Lune sur le plan de l'écliptique.* — Soient $\frac{1}{u}$ cette projection et

$$u = a(1 + \rho),$$

$a$ désignant une constante et $\rho$ une quantité variable du premier ordre. On trouve aisément (Andoyer, *loc. cit.*) cette équation différentielle

$$\text{(C')} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2\rho}{dv^2} + \left(\frac{12 m^2}{l^2 - 1} - \tfrac{3}{2} m^2\right) \sin[(2 - 2m)v - 2\sigma] \frac{d\rho}{dv} \\ &\quad + \rho \left\{ 1 - \tfrac{1}{2} m^2 - \left(\tfrac{3}{2} m^2 + \frac{12 m^2 l}{l^2 - 1}\right) \cos[(2 - 2m)v - 2\sigma)] \right\} = \mathrm{U}, \end{aligned} \right.$$

avec

$$\text{(10)} \quad \left\{ \begin{aligned} &l = 2(1 - m), \\ &\mathrm{U} = -\tfrac{1}{2} m^2 - \tfrac{3}{4} \varkappa^2 - 3 m^2 \cos[(2 - 2m)v - 2\sigma] \\ &\qquad + \tfrac{3}{4} \varkappa^2 \cos(2gv - 2\gamma) + \text{troisième ordre}. \end{aligned} \right.$$

Dans le premier membre de (C'), on a négligé les petites quantités du

quatrième ordre; toutefois on peut s'assurer que la portion $1-\frac{3}{2}m^2$ du coefficient de $\rho$ ne contiendrait pas de terme en $m^3$, mais seulement des termes en $m^4$, $m^5$, …, si l'on poussait plus loin les calculs.

Pour ramener l'équation (C') au type (A), nous ferons

$$(11)\qquad \rho = z\,\mathrm{E}^{\left(\frac{3}{4}m^2-\frac{6m^3}{l^2-1}\right)\int \sin\frac{1}{2}[(2-2m)v-2\sigma]\,dv},$$

ce qui nous donnera, avec la même approximation,

$$(12)\qquad \frac{d^2z}{dv^2}+z\left\{1-\frac{3}{2}m^2-\frac{3}{8}m^2\left(3-\frac{1}{2}l+\frac{12l}{l^2-1}\right)\cos[(2-2m)v-2\sigma]\right\}=\mathrm{U}.$$

On aurait dû mettre, dans le second membre, au lieu de U,

$$\mathrm{U}\,\mathrm{E}^{-\left(\frac{3}{4}m^2-\frac{6m^3}{l^2-1}\right)\int \sin[(2-2m)v-2\sigma]\,dv};$$

mais, en réduisant l'exponentielle à l'unité, cela revient à négliger dans U les quantités du quatrième ordre, ce que nous avons déjà fait.

Nous ferons coïncider (12) avec ($a$) si nous prenons

$$(13)\qquad \begin{cases} n^2 = 1-\frac{3}{2}m^2, \qquad l = 2(1-m), \\ \alpha = -\frac{3}{8}m^2\left(3-\frac{1}{2}l+\frac{12l}{l^2-1}\right). \end{cases}$$

Nous aurons d'abord, d'après ($d$),

$$w = \mu v + \psi,$$

$$\mu = n\left[1+\frac{\alpha^2}{n^2(l^2-4n^2)}+\alpha^4\frac{-2l^4+35l^2n^2-60n^4}{4n^4(l^2-n^2)(l^2-4n^2)^3}+\ldots\right].$$

La formule ($e$) pourra être réduite à

$$\begin{aligned} z = \eta_0\cos w &+ \frac{\alpha}{l(l+2n)}\eta_0\cos[w+(2-2m)v-2\sigma] \\ &+ \frac{\alpha}{l(l-2n)}\eta_0\cos[w-(2-2m)v+2\sigma] \\ &+ \frac{1}{2n}\sum \mathrm{A}_i\cos\mathrm{V}_i\left(\frac{1}{\mu+l_i}+\frac{1}{\mu-l_i}\right); \end{aligned}$$

$\mathrm{V}_i$ désignera successivement les trois arguments $0$, $(2-2m)v-2\sigma$, $2gv-2\gamma$, de U, formule (10);

$A_i$ désignera successivement les coefficients des cosinus de ces trois arguments;

$\lambda_i$ désignera successivement les coefficients de $v$ dans les trois arguments.

Comme pour $s$, on devra prêter une attention particulière aux petits diviseurs $l - 2n$ et $l^2 - 4n^2$: on trouve, en se bornant au second ordre,

$$\begin{aligned} z = \eta_0 \cos w + \tfrac{15}{8} m \eta_0 \cos[w - (2 - 2m)v + 2\sigma] \\ - \tfrac{1}{2} m^2 - \tfrac{3}{4} \varkappa^2 + m^2 \cos[(2 - 2m)v - 2\sigma] - \tfrac{1}{4} \varkappa^2 \cos(2gv - 2\gamma). \end{aligned}$$

On a laissé de côté le terme en $\cos[w + (2 - 2m)v - 2\sigma]$, parce que son coefficient contient le facteur $m^2 \eta_0$, qui est du troisième ordre. Il faut maintenant porter cette valeur de $z$ dans (11), qui donnera, avec la précision cherchée, $\rho = z$; nous ferons en même temps $\eta_0 = e$, $\psi = -\varpi$, $\mu = c$, et nous aurons

$$(\text{D}') \qquad c = n\left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2(l^2 - 4n^2)} + \alpha^4 \frac{-2l^6 + 35 l^4 n^2 - 60 n^6}{4n^4(l^2 - n^2)(l^2 - 4n^2)^3}\right],$$

$$(\text{E}') \quad \left\{ \begin{aligned} r = a\Big\{1 - \tfrac{1}{2} m^2 - \tfrac{3}{4} \varkappa^2 + e \cos(cv - \varpi) + m^2 \cos[(2 - 2m)v - 2\sigma] \\ - \tfrac{1}{4} \varkappa^2 \cos(2gv - 2\gamma) + \tfrac{15}{8} me \cos[(2 - c - 2m)v - 2\sigma + \varpi]\Big\}. \end{aligned} \right.$$

Nous allons maintenant procéder à la mise en nombres de la valeur (D′) de $c$; nous prendrons avec Laplace $m = 0{,}0748013$; les formules (13) nous donneront

$$l = 1{,}8503974; \qquad \log n = \bar{1}{,}9981698; \qquad \log \alpha^2 = \bar{3}{,}3469278;$$

$$\frac{\alpha^2}{n^2(l^2 - 4n^2)} = -0{,}0041326;$$

$$\alpha^4 \frac{-2l^6 + 35 l^4 n^2 - 60 n^6}{4n^4(l^2 - n^2)(l^2 - 4n^2)^3} = -0{,}0001178;$$

d'où

$$c = 0{,}991562; \qquad 1 - c = 0{,}008438.$$

La valeur exacte de $1 - c$ est $0{,}008452\ldots$; on a donc le moyen mouvement du périgée avec une grande approximation, à $\frac{1}{600}$ de sa valeur environ.

VI. Il est bon d'approfondir le résultat ci-dessus, dont la précision inespérée est un peu fortuite.

En effet, les théories plus complètes de la Lune donnent pour expression

analytique de $1-c$ une série ordonnée suivant les puissances de $m$ et de $e$, $e'$, $\varkappa$ et $\frac{a}{a'}$ ($e'$ = excentricité de l'orbite solaire, $\frac{a}{a'}$ = rapport des grands axes) : or, notre expression de $1-c$ laisse entièrement de côté $e$, $e'$, $\varkappa$, et $\frac{a}{a'}$; on ne doit donc la comparer qu'à la portion de $1-c$ qui ne dépend que de $m$, et qui est fournie par une théorie certaine. M. Hill donne pour cette portion

$$1-c=0,008572\ldots;$$

nous avons donc cette portion de $1-c$ à $\frac{1}{61}$ près.

Pour pénétrer encore plus avant dans le sujet, je vais développer suivant les puissances de $m$ la valeur (D′) de $c$, en y remplaçant, bien entendu, $\alpha$, $l$, $n$ par leurs valeurs (13).

Je trouve successivement

$$(14)\qquad x=-\tfrac{3}{4}m^2\left(2+m+24\,\frac{1-m}{3-8m+4m^2}\right),$$

$$(15)\qquad x=-\tfrac{3}{4}m^2\left[2+m+(8-8m)\left(1+\tfrac{8}{3}m+\tfrac{52}{9}m^2+\tfrac{320}{27}m^3+\ldots\right)\right],$$

$$x=-\tfrac{3}{4}m^2\left(10+\tfrac{43}{3}m+\tfrac{224}{9}m^2+\ldots\right),$$

$$x^2=\tfrac{225}{4}m^4\left(1+\tfrac{43}{15}m+\tfrac{6329}{900}m^2+\ldots\right),$$

$$n^2(l^2-4n^2)=-8\left(1-\tfrac{5}{4}m-\tfrac{7}{4}m^2+\ldots\right),$$

$$\frac{x^2}{n^2(l^2-4n^2)}=-\tfrac{225}{32}m^3\left(1+\tfrac{247}{60}m+\tfrac{50761}{3600}m^2+\ldots\right),$$

$$\alpha^4\,\frac{-2l^4+35l^2n^2-60n^4}{4n^4(l^2-n^2)(l^2-4n^2)^3}=-\tfrac{810000}{32768}m^4+\ldots;$$

$$(16)\qquad c=1-\tfrac{3}{4}m^2-\tfrac{225}{32}m^3-\tfrac{3741}{128}m^4-\tfrac{236789}{2048}m^5.$$

Voici la valeur exacte des cinq premiers termes de la série, d'après Delaunay,

$$(17)\qquad c=1-\tfrac{3}{4}m^2-\tfrac{225}{32}m^3-\tfrac{4071}{128}m^4-\tfrac{265493}{2048}m^5.$$

On voit que les coefficients de $m^2$ et de $m^3$ dans (16) sont corrects; et l'on pouvait répondre *a priori* que cela devait arriver; mais, en comparant les coefficients de $m^4$ et $m^5$ dans (16) et 17, on remarque que, si ces coefficients ne sont pas les mêmes, ils ne diffèrent pas beaucoup; ainsi, l'erreur relative du coefficient de $m^4$ est de $\frac{1}{12}$, et celle du coefficient de $m^5$ est de $\frac{1}{10}$. C'est à

cette circonstance que l'on doit d'avoir trouvé plus haut la précision déjà très grande de $\frac{1}{64}$.

Si l'on ne gardait dans la formule (16) que les termes en $m^2$ et $m^3$, qui sont seuls exacts, on n'aurait $1-c$ qu'à $\frac{1}{6}$ près.

Il est important de remarquer qu'il est impossible de trouver, en opérant comme nous l'avons fait, les valeurs complètes des coefficients de $m^4$ et $m^5$ dans (16); car, dans l'équation (C'), la portion $1-\frac{3}{2}m^2$ du coefficient de $\rho$ demande à être complétée par des termes en $m^4$, $m^5$, ..., et de même pour le reste de l'équation. Toutefois, la comparaison des deux valeurs de $1-c$ montre que les termes ainsi négligés sont relativement peu importants, de telle sorte que l'équation (12) réalise, sous une forme simple, une approximation déjà assez grande.

L'une des grosses difficultés de la théorie de la Lune provient du peu de convergence des séries développées suivant les puissances de $m$; cet inconvénient se manifeste surtout dans l'expression de $c$, formule (17); la convergence est extrêmement lente, parce que les coefficients des puissances successives de $m$ vont en augmentant et en se compliquant rapidement. Ces grands coefficients apparaissent quand on passe de la formule (14) à la formule (15); ils proviennent du développement de la fraction $\frac{1-m}{3-8m+4m^2}$, lequel est peu convergent. Il semble qu'il y ait lieu d'éviter ce développement, ou de l'améliorer, comme l'ont proposé MM. Hill et Adams, en posant $m=\frac{m'}{1+m'}$. On trouve, en effet, dans cette hypothèse, au lieu de (17), l'expression suivante pour $c$,

$$c = 1-\tfrac{3}{4}m'^2+\tfrac{57}{32}m'^3-\tfrac{123}{128}m'^4+\tfrac{1925}{2048}m'^5-\ldots,$$

série beaucoup plus convergente.

On voit que tous les résultats précédents ont pu être obtenus sans qu'on ait eu besoin de recourir à la théorie des fonctions elliptiques.

Il nous semble que le mérite principal des travaux récents de M. Gyldén est d'avoir montré que l'on peut obtenir une solution déjà très approchée du mouvement de la Lune, ce qu'on appelle l'*orbite intermédiaire*, à l'aide d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques. On peut faire ainsi bénéficier l'Astronomie des progrès importants qu'a faits dans ces derniers temps cette branche de l'Analyse mathématique. Il est bien remarquable que, dans le Mémoire déjà cité, Lagrange

ait été amené, il y a longtemps, à propos des perturbations de Jupiter et de Saturne, à une équation,

$$\frac{d^2 z}{dv^2} + 2A\sin(lv + b)\frac{dz}{dv} + z[n^2 + B\cos(lv + b)] = U,$$

de même forme que celles que M. Gyldén a retrouvées depuis, par une voie différente, dans ses travaux sur l'orbite intermédiaire de la Lune.

## SECONDE PARTIE.

### MÉTHODE DE M. GYLDÉN.

VIII. Reprenons l'équation différentielle ($a$) sous la forme

$$(a_1) \qquad \frac{d^2 z}{dv^2} + z(a_0^2 + 2a_1\cos 2v) = U,$$

où U est supposé être une fonction connue de $v$.

M. Gyldén introduit des fonctions elliptiques de module $k$; soit posé, suivant l'usage,

$$k' = \sqrt{1-k^2}, \qquad K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

$$E_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}};$$

La théorie des fonctions elliptiques donne

$$(18) \qquad \operatorname{sn}^2 u = \frac{8}{k^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\left(\frac{q}{1-q^2}\gamma - \frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{2q^2}{1-q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} - \frac{3q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{K} - \ldots\right),$$

$\gamma$ étant une constante que l'on détermine par l'une des formules

$$(19) \qquad \frac{8q}{1-q^2}\gamma = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi}\frac{2E_1}{\pi},$$

$$(20) \qquad \gamma = 1 + (1-2q^2)\left(\frac{2q}{1-q^4} + \frac{3q^2}{1-q^6} + \ldots\right).$$

Posons

(21) $$v = \frac{\pi}{2K} u;$$

l'équation $(a_1)$ deviendra

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \frac{d^2 z}{du^2} + z\left(a_0^2 + 2a_1 \cos\frac{\pi u}{K}\right) = U,$$

et si l'on porte dans cette formule la valeur de $\cos\frac{\pi u}{K}$ tirée de (18), on trouvera aisément

$(a_2)$ $$\frac{d^2 z}{du^2} - z\left[k^2 \frac{1-q^2}{4q} a_1 \operatorname{sn}^2 u - (a_0^2 + 2a_1\gamma)\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\right] = \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 U_1,$$

en posant

$(\gamma)$ $$\begin{cases} U_1 = U + U_2, \\ U_2 = 2a_1 z(1-q^2)\left(\frac{2q}{1-q^2}\cos\frac{2\pi u}{K} + \frac{3q^2}{1-q^4}\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots\right). \end{cases}$$

On voit qu'on a modifié le second membre de l'équation différentielle en y introduisant, à côté de U, des termes qui contiennent en facteur la fonction inconnue $z$; ces termes sont, il est vrai, des ordres de $q$, $q^2$, ..., c'est-à-dire, comme on le verra dans un moment, des ordres de $a_1$, $a_1^2$, ..., donc petits. En supprimant d'abord le second membre de $(a_2)$, on a une équation qui se ramène à l'une des formes de l'équation de Lamé considérées par M. Hermite

$(a')$ $$\frac{d^2 z}{du^2} - z(2k^2 \operatorname{sn}^2 u - h) = 0.$$

Il suffit, en effet, de poser

(21) $$h = (a_0^2 + 2a_1\gamma)\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2,$$

(22) $$\begin{cases} a_1 \dfrac{1-q^2}{4q} = 2, \qquad \text{d'où} \qquad q = \dfrac{\sqrt{16 + a_1^2} - 4}{a_1}, \\ q = \frac{1}{8} a_1 - \frac{1}{512} a_1^3 + \ldots. \end{cases}$$

En introduisant les fonctions de Jacobi, et désignant par $C_1$ et $C_2$ deux constantes arbitraires, l'intégrale générale de l'équation $(a')$ est, d'après

M. Hermite (*Sur quelques applications des fonctions elliptiques*),

$$(\delta)\qquad \left\{\begin{array}{l} z = C_1 z_1 + C_2 z_2, \\ \text{où l'on a, en faisant } i = \sqrt{-1}, \\ z_1 = \dfrac{H(u+i\omega)}{\Theta(u)} e^{-u\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}}, \qquad z_2 = \dfrac{H(u-i\omega)}{\Theta(u)} e^{u\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}}, \end{array}\right.$$

$$(\varepsilon)\qquad dn\, i\omega = \sqrt{h - k^2}.$$

VIII. Pour développer $z_1$, $z_2$ et, par suite, $z$ en séries trigonométriques, nous partirons d'une formule importante donnée pour la première fois par Jacobi, à propos de la rotation des corps solides, en adoptant la forme sous laquelle l'a présentée M. Hermite (*loc. cit.*, p. 19),

$$\frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)}{\Theta(i\omega)}\frac{H(u+i\omega)}{\Theta(u)} = e^{\frac{i\pi u}{2K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{\frac{ni\pi u}{K}}}{\sin\left(\dfrac{i\pi\omega}{2K} + \dfrac{2n+1}{2}\dfrac{i\pi K'}{K}\right)}.$$

Introduisons dans le second membre $v$ au lieu de $u$, formule (21); remplaçons $\frac{K'}{K}$ par sa valeur en fonction de $q$, et posons

$$(23)\qquad \frac{\pi\omega}{2K} = \lambda;$$

nous trouverons

$$(24)\qquad \frac{2K}{\pi}\frac{H'(0)}{\Theta(i\omega)}\frac{H(u+i\omega)}{\Theta(u)} = 2i\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{(2n+1)iv}}{q^{\frac{2n+1}{2}}e^{-\lambda} - q^{-\frac{2n+1}{2}}e^{\lambda}}.$$

Faisons encore

$$(\eta)\qquad \mu = 1 + \frac{2K}{\pi}\frac{\Theta'(i\omega)}{i\Theta(i\omega)},$$

et nous tirerons sans peine des formules ($\delta$), (24) et ($\eta$)

$$z_1 = i\frac{\pi}{K}\frac{\Theta(i\omega)}{H'(0)}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{(2n+2-\mu)iv}}{q^{\frac{2n+1}{2}}e^{-\lambda} - q^{-\frac{2n+1}{2}}e^{\lambda}};$$

d'où, en mettant à part le terme du signe $\sum$ qui correspond à $n = -1$, et

faisant des transformations très simples,

$$z_1 = \frac{i\pi}{K}\frac{\Theta(i\omega)}{H'(0)\left(q^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda} - q^{\frac{1}{2}}e^{\lambda}\right)}\left(e^{-i\mu v} + \sum_{n=0}^{n=+\infty} q^n \frac{q - e^{-2\lambda}}{1 - q^{2n+1}e^{-2\lambda}} e^{(2n+2-\mu)iv} + \sum_{n=2}^{n=+\infty} q^{n-1}\frac{e^{-2\lambda} - q}{e^{-2\lambda} - q^{2n-1}} e^{(-2n+2-\mu)iv}\right).$$

Posons maintenant

$$(\zeta)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{q}{a_1}\right)^{n+1} \dfrac{q - e^{-2\lambda}}{q - q^{2n+2}e^{-2\lambda}} = \mathfrak{A}_{-n-1} & (n \geqq 0), \\ \left(\dfrac{q}{a_1}\right)^{n-1} \dfrac{e^{-2\lambda} - q}{e^{-2\lambda} - q^{2n-1}} = \mathfrak{A}_{n-1} & (n \geqq 2), \end{cases}$$

et il viendra

$$z_1 = \frac{i\pi}{K}\frac{\Theta(i\omega)}{H'(0)\left(q^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda} - q^{\frac{1}{2}}e^{\lambda}\right)}\left(e^{-i\mu v} + \sum_{n=0}^{n=+\infty} \mathfrak{A}_{-n-1} a_1^{n+1} e^{(2n+2-\mu)iv} + \sum_{n=2}^{n=+\infty} \mathfrak{A}_{n-1} a_1^{n-1} e^{(-2n+2-\mu)iv}\right),$$

$$z_2 = -\frac{i\pi}{K}\frac{\Theta(i\omega)}{H'(0)\left(q^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda} - q^{\frac{1}{2}}e^{\lambda}\right)}\left(e^{i\mu v} + \sum_{n=0}^{n=+\infty} \mathfrak{A}_{-n-1} a_1^{n+1} e^{-(2n+2-\mu)iv} + \sum_{n=2}^{n=+\infty} \mathfrak{A}_{n-1} a_1^{n-1} e^{-(-2n+2-\mu)iv}\right).$$

Si l'on fait encore

$$C_1 = \frac{K}{\pi}\frac{H'(0)\left(q^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda} - q^{\frac{1}{2}}e^{\lambda}\right)}{2i\Theta(i\omega)}\gamma_0 e^{-i\psi},$$

$$C_2 = -\frac{K}{\pi}\frac{H'(0)\left(q^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda} - q^{\frac{1}{2}}e^{\lambda}\right)}{2i\Theta(i\omega)}\gamma_0 e^{i\psi},$$

on trouvera finalement, pour l'intégrale générale de l'équation $(a')$,

$$(\mathrm{F})\quad \left\{\begin{aligned} z = \eta_0 \cos(\mu v + \psi) &+ \eta_0 \sum_{n=1}^{n=+\infty} \mathcal{B}_n\, a_1^n \cos(\mu v + \psi + 2nv) \\ &+ \eta_0 \sum_{n=1}^{n=+\infty} \mathcal{B}_{-n} a_1^n \cos(\mu v + \psi - 2nv). \end{aligned}\right.$$

On retrouve bien pour $z$ une expression de la même forme que celle à laquelle nous sommes arrivés dans la première Partie de ce Mémoire; les formules $(\zeta)$ donnent les expressions générales des coefficients $\mathcal{B}_n$, et c'est un avantage de l'emploi des fonctions elliptiques.

IX. Il faut maintenant intégrer l'équation $(a_2)$ avec second membre.

On part de la solution (F) de l'équation sans second membre, et l'on fait varier les constantes arbitraires $\eta_0$ et $\psi$. Soit Z l'intégrale générale de $(a_2)$; on trouve aisément, par la méthode connue,

$$(d)\qquad Z = z + \zeta,$$

$z$ ayant l'expression (F), et $\zeta$ étant exprimé au moyen de cet ensemble de formules

$$(e)\quad \left\{\begin{aligned} &\zeta = \frac{1}{c}\left(z''\int U_1 z'\,dv - z'\int U_1 z''\,dv\right), \\ &z' = \cos\mu v + \sum_1^{\infty} \mathcal{B}_n a_1^n \cos(\mu + 2n)v + \sum_1^{\infty} \mathcal{B}_{-n} a_1^n \cos(\mu - 2n)v, \\ &z'' = \sin\mu v + \sum_1^{\infty} \mathcal{B}_n a_1^n \sin(\mu + 2n)v + \sum_1^{\infty} \mathcal{B}_{-n} a_1^n \sin(\mu - 2n)v, \\ &c = z'\frac{dz''}{dv} - z''\frac{dz'}{dv}. \end{aligned}\right.$$

On trouvera sans peine

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} c = \mu &+ 2a_1[\mu(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_{-1}) + (\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_{-1})] \\ &+ a_1^2[2\mu(\mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_{-2}) + 4(\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_{-2}) \\ &\qquad + \mu(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_{-1})^2 + 2(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_{-1})(\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_{-1})] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

et, en faisant

$$(26)\qquad U_1 = \sum A_i \cos V_i = \sum A_i \cos(l_i v + b_i):$$

$$(f)\quad \left\{\begin{aligned}
2c\zeta = &\sum A_i \cos V_i \Big[\frac{1}{\mu + l_i} + \frac{1}{\mu - l_i} + \mathfrak{B}_1^2 a_1^2 \Big(\frac{1}{\mu + 2 + l_i} + \frac{1}{\mu + 2 - l_i}\Big) \\
&\qquad + \mathfrak{B}_{-1}^2 a_1^2 \Big(\frac{1}{\mu - 2 + l_i} + \frac{1}{\mu - 2 - l_i}\Big) + \ldots\Big] \\
&+ \sum A_i \cos(V_i + 2v) \Big[\mathfrak{B}_1 a_1 \Big(\frac{1}{\mu + 2 + l_i} + \frac{1}{\mu - l_i}\Big) \\
&\qquad + \mathfrak{B}_{-1} a_1 \Big(\frac{1}{\mu - 2 - l_i} + \frac{1}{\mu + l_i}\Big) + \ldots\Big] \\
&+ \sum A_i \cos(V_i - 2v) \Big[\mathfrak{B}_1 a_1 \Big(\frac{1}{\mu + 2 - l_i} + \frac{1}{\mu + l_i}\Big) \\
&\qquad + \mathfrak{B}_{-1} a_1 \Big(\frac{1}{\mu - 2 + l_i} + \frac{1}{\mu - l_i}\Big) + \ldots\Big] \\
&+ \sum A_i \cos(V_i + 4v) \Big[\mathfrak{B}_2 a_1^2 \Big(\frac{1}{\mu + 4 + l_i} + \frac{1}{\mu - l_i}\Big) \\
&\qquad + \mathfrak{B}_{-2} a_1^2 \Big(\frac{1}{\mu - 4 - l_i} + \frac{1}{\mu + l_i}\Big) \\
&\qquad + \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_{-1} a_1^2 \Big(\frac{1}{\mu + 2 + l_i} + \frac{1}{\mu - 2 - l_i}\Big) + \ldots\Big] \\
&+ \sum A_i \cos(V_i - 4v) \Big[\mathfrak{B}_2 a_1^2 \Big(\frac{1}{\mu + 4 - l_i} + \frac{1}{\mu + l_i}\Big) \\
&\qquad + \mathfrak{B}_{-2} a_1^2 \Big(\frac{1}{\mu - 4 + l_i} + \frac{1}{\mu - l_i}\Big) \\
&\qquad + \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_{-1} a_1^2 \Big(\frac{1}{\mu + 2 - l_i} + \frac{1}{\mu - 2 + l_i}\Big) + \ldots\Big] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Pour les termes $A_i \cos V_i$ de $U_1$ qui proviennent de U même, il n'y a pas de difficultés dans l'application des formules ci-dessus. Considérons ceux qui proviennent de $U_2$; il faut d'abord se reporter à l'expression $(\gamma)$ de $U_2$, que l'on peut écrire ainsi

$$U_2 = 2a_1 z(1 - q^2)\Big(\frac{2q}{1 - q^4}\cos 4v + \frac{3q^2}{1 - q^6}\cos 6v + \ldots\Big),$$

et y remplacer $z$ par sa valeur (F),

$$z = \eta_0 \cos(\mu v + \psi) + \ldots;$$

nous trouverons, en nous bornant aux termes en $a_1^2$ et remplaçant $q$ par $\frac{1}{8}a_1$,

$$U_2 = \tfrac{1}{4}a_1^2\eta_0\cos(\mu v + \psi + 4v) + \tfrac{1}{4}a_1^2\eta_0\cos(\mu v + \psi - 4v).$$

On pourra maintenant appliquer la formule ($f$), en la réduisant à

$$2c\zeta = \sum A_i \cos V_i\left(\frac{1}{\mu + l_i} + \frac{1}{\mu - l_i}\right),$$

et prenant successivement

$$A_i = \tfrac{1}{4}a_1^2\eta_0, \qquad V_i = \mu v + \psi + 4v, \qquad l_i = \mu + 4,$$
$$A_i = \tfrac{1}{4}a_1^2\eta_0, \qquad V_i = \mu v + \psi - 4v, \qquad l_i = \mu - 4.$$

On pourra aussi faire $c = \mu = a_0$; on trouvera de cette manière

$$\zeta = \frac{1}{8a_0}a_1^2\eta_0\left(\frac{1}{2a_0+4} - \tfrac{1}{4}\right)\cos(\mu v + \psi + 4v) + \tfrac{1}{8}a_1^2\eta_0\left(\frac{1}{2a_0-4} + \tfrac{1}{4}\right)\cos(\mu v + \psi - 4v),$$

$$\zeta = -\frac{1}{32}\,\frac{a_1^2\eta_0}{2 + a_0}\cos(\mu v + \psi + 4v) - \frac{1}{32}\,\frac{a_1^2\eta_0}{2 - a_0}\cos(\mu v + \psi - 4v).$$

Ces termes étant de même forme que certains termes de la formule (F), il convient de les réunir; on trouve ainsi

$$(G)\quad \left\{\begin{aligned} s = {} & \eta_0\cos(\mu v + \psi) \\ & + \vartheta_1 a_1\,\eta_0\cos(\mu v + \psi + 2v) + \left[\vartheta_2 - \frac{1}{32(2 + a_0)}\right]a_1^2\eta_0\cos(\mu v + \psi + 4v) \\ & + \vartheta_{-1}a_1\eta_0\cos(\mu v + \psi - 2v) + \left[\vartheta_{-2} - \frac{1}{32(2 - a_0)}\right]a_1^2\eta_0\cos(\mu v + \psi - 4v) \\ & + \text{des termes en } a_1^3, a_1^4, \ldots. \end{aligned}\right.$$

On tire d'ailleurs des formules ($\zeta$), en remplaçant $\frac{q}{a_1}$ par $\frac{1}{8}$, avec la même précision que ci-dessus,

$$(H)\quad \left\{\begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{1}{8}\,\frac{e^{-2\lambda} - q}{e^{-2\lambda} - q^3}, & \vartheta_{-1} &= \frac{1}{8}\,\frac{q - e^{-2\lambda}}{q - q^3 e^{-2\lambda}}, \\ \vartheta_2 &= \frac{1}{64}\,\frac{e^{-2\lambda} - q}{e^{-2\lambda} - q^5}, & \vartheta_{-2} &= \frac{1}{64}\,\frac{q - e^{-2\lambda}}{q - q^5 e^{-2\lambda}}. \end{aligned}\right.$$

On calculera ensuite Z par les formules ($d$) et ($f$), en ne prenant pour $A_i \cos V_i$ que les divers termes périodiques qui figurent dans U même.

Quant à la quantité $\mu$, sa détermination résultera des formules ($\varepsilon$) et ($\eta$).

X. Pour retrouver jusqu'au bout les formules de la première Partie, il ne nous reste donc plus qu'à calculer $\vartheta_1$, $\vartheta_{-1}$, $\vartheta_2$, $\vartheta_{-2}$ et $\mu$ en fonction explicite de $a_0$ et $a_1$; nous développerons nos calculs suivant les puissances de $a_1$.

Nous supposerons $a_0 > 1$.

En remplaçant dans ($\varepsilon$) et ($\eta$) les fonctions $\Theta(i\omega)$ et $\operatorname{dn} i\omega$ par leurs développements connus et tenant compte de la formule (23), il vient

$$i\frac{\mu-1}{2} = \frac{2q\sin 2i\lambda - 4q^4\sin 4i\lambda + \dots}{1-2q\cos 2i\lambda + 2q^4\cos 4i\lambda - \dots}, \tag{27}$$

$$\frac{\sqrt{h-k^2}}{\sqrt{k'}} = \frac{1+2q\cos 2i\lambda + 2q^4\cos 4i\lambda + \dots}{1-2q\cos 2i\lambda + 2q^4\cos 4i\lambda - \dots}; \tag{28}$$

les termes écrits nous suffiront.

Soit posé

$$\frac{\sqrt{h-k^2}-\sqrt{k'}}{\sqrt{h-k^2}+\sqrt{k'}} = \tau; \tag{29}$$

on tirera aisément de (19), (21) et (22)

$$\tau = \frac{\sqrt{a_0^2\left(\frac{\pi}{2\mathrm{K}}\right)^2 + 1 + k'^2 - \frac{2\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}}} - \sqrt{k'}}{\sqrt{a_0^2\left(\frac{\pi}{2\mathrm{K}}\right)^2 + 1 + k'^2 - \frac{2\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}}} + \sqrt{k'}}. \tag{30}$$

J'ai développé cette expression suivant les puissances de $q$, et j'ai trouvé

$$\tau = \frac{a_0-1}{a_0+1} + 8\frac{a_0^2+4}{a_0(a_0+1)^2}q^2 + \dots. \tag{31}$$

Le terme en $q$ ne figure pas dans ce développement, qui ne contiendra, plus généralement, que des puissances paires de $q$; on le démontre en changeant, dans l'expression (30) de $\tau$, $q$ en $-q$. On sait, d'après la théorie des fonctions elliptiques, que

$$k,\quad k',\quad \mathrm{K},\quad \mathrm{E}_1$$

se changent respectivement en

$$\frac{ik}{k'},\quad \frac{1}{k'},\quad k'\mathrm{K},\quad \frac{\mathrm{E}_1}{k'};$$

on en conclut aisément que $\tau$ ne change pas.

M. Hermite, auquel nous avions communiqué ce résultat, a bien voulu nous en donner une démonstration très simple et élégante, que nous reproduisons dans une Note placée à la fin du Mémoire.

La formule (28) donne, en introduisant $\tau$,

$$\tau = \frac{2q\cos 2i\lambda}{1 + 2q^4\cos 4i\lambda}; \tag{32}$$

on en conclut, par la résolution d'une équation du second degré,

$$\cos 2i\lambda = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\tau^2 q^2(1 - 2q^4)}}{4\tau q^2},$$

$$2q\cos 2i\lambda = \tau(1 + \tau^2 q^2 + \ldots), \tag{33}$$

d'où

$$2q\sin 2i\lambda = i\tau\left[1 + \left(\tau^2 - \frac{2}{\tau^2}\right)q^2 + \ldots\right]. \tag{34}$$

En portant ces valeurs de $\cos 2i\lambda$ et de $\sin 2i\lambda$ dans la formule (27), préalablement écrite ainsi

$$i\frac{\mu - 1}{2} = 2q\sin 2i\lambda\,\frac{1 - 4q^2\cos 2i\lambda}{1 - 2q\cos 2i\lambda + 4q^4\cos^2 2i\lambda},$$

il vient

$$\mu = \frac{1 + \tau}{1 - \tau} - 4\frac{1 + \tau^2}{\tau(1 - \tau)}q^2 + \ldots.$$

En remplaçant $\tau$ par sa valeur (31), on trouve, après réduction,

$$\mu = a_0 + \frac{16}{a_0(1 - a_0^2)}q^2 + \ldots,$$

ou, avec la même précision,

$$\mu = a_0\left[1 + \frac{a_1^2}{4a_0^2(1 - a_0^2)} + \ldots\right].$$

La formule

$$e^{-2\lambda} = \cos 2i\lambda + i\sin 2i\lambda$$

donne, en ayant égard aux expressions (33) et (34) de $\cos 2i\lambda$ et $\sin 2i\lambda$,

$$2qe^{-2\lambda} = \tau + \tau^3 q^2 + \ldots - \tau + \left(\frac{q}{\tau} - \tau^3\right)q^2 + \ldots,$$

$$e^{-2\lambda} = \frac{q}{\tau} + \ldots,$$

ou bien, en remplaçant $\tau$ par sa valeur (31),

$$e^{-2\lambda} = \frac{a_0+1}{a_0-1}q + \ldots.$$

Portons cette valeur de $e^{-2\lambda}$ dans les formules (H), et nous trouverons, en négligeant $q^2$,

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{1}{4(1+a_0)}, \qquad \mathfrak{B}_{-1} = \frac{1}{4(1-a_0)}, \qquad \mathfrak{B}_2 = \frac{1}{32(1+a_0)}, \qquad \mathfrak{B}_{-2} = \frac{1}{32(1-a_0)}.$$

Nous aurons ensuite, en transportant dans (G),

$$(\mathrm{K})\left\{\begin{aligned} z &= \eta_0\cos(\mu v+\psi) \\ &\quad + \frac{a_1}{4(1+a_0)}\eta_0\cos(\mu v+\psi+2v) + \frac{a_1^2}{32(1+a_0)(2+a_0)}\eta_0\cos(\mu v+\psi+4v) \\ &\quad + \frac{a_1}{4(1-a_0)}\eta_0\cos(\mu v+\psi-2v) + \frac{a_1^2}{32(1-a_0)(2-a_0)}\eta_0\cos(\mu v+\psi-4v), \\ \mu &= a_0\left[1+\frac{a_1^2}{4a_0^2(1-a_0^2)}\right]. \end{aligned}\right.$$

Ces formules sont bien identiques, au degré de précision dont nous nous contentons, à celles que nous avons rencontrées dans la première Partie.

Les deux méthodes conduisent au même résultat, ce qui devait être. Nous sommes loin de vouloir dire par là que les fonctions elliptiques en général, et la théorie de M. Gyldén en particulier, ne soient pas appelées à jouer bientôt un rôle important dans le calcul des perturbations.

### *Note relative à l'expression de la quantité désignée par $\tau$ dans la formule* (30) *de la page* D.21.

Nous allons reproduire ici la belle démonstration que M. Hermite a bien voulu nous communiquer pour prouver que l'expression

$$\tau = \frac{\sqrt{a_0^2\left(\frac{\pi}{2\mathrm{K}}\right)^2+1+k'^2-\frac{2\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}}}-\sqrt{k'}}{\sqrt{a_0^2\left(\frac{\pi}{2\mathrm{K}}\right)^2+1+k'^2-\frac{2\mathrm{E}_1}{\mathrm{K}}}+\sqrt{k'}}$$

est une fonction paire de $q$.

Si l'on introduit la fonction de M. Weierstrass,

$$J = K - E_1,$$

on peut écrire

$$(I) \qquad \tau = \frac{\sqrt{a_0^2 - \left(\frac{2Kk}{\pi}\right)^2 + \frac{8KJ}{\pi^2}} - \frac{2K\sqrt{k'}}{\pi}}{\sqrt{a_0^2 - \left(\frac{2Kk}{K}\right)^2 + \frac{8KJ}{\pi^2}} + \frac{2K\sqrt{k'}}{\pi}}.$$

Or on a, d'après Jacobi (*Fundamenta*, § 40),

$$(II) \qquad \frac{2K\sqrt{k'}}{\pi} = 1 - \frac{4q^2}{1+q^4} + \frac{4q^4}{1+q^8} - \frac{4q^6}{1+q^{12}} + \ldots,$$

ce qui est une fonction paire de $q$; il suffit donc de démontrer qu'il en est de même de

$$\frac{8KJ}{\pi^2} - \left(\frac{2Kk}{\pi}\right)^2.$$

Or l'équation de Jacobi

$$\int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 x \, dx = \frac{J}{K} x - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$$

donne, quand on la différentie, et que l'on fait ensuite $x = 0$,

$$(III) \qquad \frac{J}{K} = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}.$$

Mais de la série

$$\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots$$

on conclut

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \Theta''(0) = 8(q - 4q^4 + 9q^9 - \ldots) = -4q D_q \Theta(0).$$

En portant cette valeur de $\Theta''(0)$ dans (III), il vient

$$\frac{KJ}{\pi^2} = -q D_q \log \Theta(0);$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{KJ}}{\pi^2} &= 2\left(\frac{q}{1-q}+\frac{3q^3}{1-q^3}+\frac{5q^5}{1-q^5}+\ldots\right)+\frac{2q^2}{1-q^2}+\frac{4q^4}{1-q^4}+\frac{6q^6}{1-q^6}+\ldots\\ &= 2\left(\frac{q}{1-q}+\frac{2q^2}{1-q^2}+\frac{3q^3}{1-q^3}+\frac{4q^4}{1-q^4}+\ldots\right)\\ &\quad -2\left(\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{2q^4}{1-q^4}+\frac{3q^6}{1-q^6}+\frac{4q^8}{1-q^8}+\ldots\right),\end{aligned}$$

en remplaçant $\Theta(0)$ par

$$\Theta(0)=[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^2(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots;$$

ou bien

$$\frac{\mathrm{KJ}}{\pi^2}=2\sum\frac{nq^n}{1-q^n}-2\sum\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}},\qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

En remarquant que l'on a

$$\frac{q^n}{1-q^n}=\frac{q^n}{1-q^{2n}}+\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}},$$

on peut écrire

$$(\mathrm{IV})\qquad \frac{\mathrm{KJ}}{\pi^2}=2\sum\frac{nq^n}{1-q^{2n}},\qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Or on a la formule connue

$$(\mathrm{V})\qquad \left(\frac{2\mathrm{K}k}{\pi}\right)^2=16\sum\frac{mq^m}{1-q^{2m}},\qquad (m=1,3,5,\ldots).$$

On conclut de (IV) et (V)

$$\frac{8\mathrm{KJ}}{\pi^2}-\left(\frac{2\mathrm{K}k}{\pi}\right)^2=32\sum\frac{nq^{2n}}{1-q^{4n}},\qquad (n=1,2,3,\ldots);$$

c'est bien une fonction paire de $q$, et l'on a finalement, sous une forme simple et élégante,

$$z=\frac{\sqrt{a_0^2+32\sum\frac{nq^{2n}}{1-q^{4n}}}-\left[1+4\sum\frac{(-1)^n q^{2n}}{1+q^{4n}}\right]}{\sqrt{a_0^2+32\sum\frac{nq^{2n}}{1-q^{4n}}}+\left[1+4\sum\frac{(-1)^n q^{2n}}{1+q^{4n}}\right]},\qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

RECHERCHES COMPLÉMENTAIRES

SUR LE

# DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE;

PAR M. B. BAILLAUD.

1. Nous avons donné, dans un Mémoire inséré au Tome II des *Annales de l'Observatoire de Toulouse*, pour le développement de la fonction perturbatrice, deux formules distinctes applicables, l'une au cas où les inclinaisons sont faibles, l'autre au cas d'inclinaisons quelconques. La seconde formule est le résultat de la combinaison de la méthode qui nous a conduit à la première avec les principes magistralement développés par M. Tisserand dans deux Mémoires insérés dans les *Annales de l'Observatoire de Paris*.

Ayant entrepris d'appliquer la seconde formule à la théorie de Pallas, nous avons dû, avant d'effectuer le développement, rechercher *a priori* le nombre des termes de chaque ordre. Le résultat de ces études a été publié dans un court Mémoire inséré parmi ceux de l'Académie des Sciences de Toulouse pour 1886. Il nous a paru depuis qu'il serait utile de généraliser les problèmes principaux qui se présentent à cet égard, et en particulier de chercher des formules faisant aussi bien connaître le nombre des termes que fournirait notre premier développement. Ces problèmes sont l'objet de la première Partie du présent travail. Leur étude nous a conduit à diverses formules hypergéométriques satisfaisant à une certaine équation récurrente, qui paraissent offrir quelque intérêt en elles-mêmes. L'application des résultats généraux à nos deux développements de la fonction perturbatrice montre bien nettement en quelle mesure chacun d'eux est praticable.

Dans la seconde Partie, nous rectifions une affirmation inexacte contenue dans notre premier Mémoire. Nous avions dit que la transformation fondamentale, qui nous permet, dans notre second développement, de réduire

notablement le nombre des termes, pourrait, dans certains cas, cesser d'être applicable. Il n'en est rien. Nous montrons ci-après que cette transformation est toujours possible dans le système solaire.

## PREMIÈRE PARTIE.

2. Désignant par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$ des nombres entiers et positifs satisfaisant à la relation

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p + 2(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_q) = m,$$

par $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_p; \varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_q$ des nombres entiers, positifs ou négatifs, respectivement de même parité que les précédents, et ne les dépassant pas en valeur absolue, nous nous proposons de trouver :

1° Le nombre $A_m$ des groupes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$;

2° Le nombre $B_m$ des groupes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p; \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q; \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_p; \varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_q$;

3° Le nombre $C_m$ des groupes $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_p; \varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_q$.

Nous aurons besoin, dans la solution de ces problèmes, d'une transformation de la fonction hypergéométrique, due à Euler, que nous allons d'abord étudier en raison de ce que le troisième élément est entier et négatif.

3. Cette transformation est la suivante :

$$(1) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right).$$

Nous allons rechercher dans quelles circonstances elle est applicable au cas où $\gamma$ est entier et négatif.

L'un des nombres $\alpha$ ou $\beta$ doit être entier et négatif, sans quoi les deux fonctions n'auraient aucun sens. Si $\alpha$ n'était pas entier et négatif, la première fonction serait entière en $x$, la seconde ne le serait pas; les deux fonctions ne seraient donc pas identiques.

Soient donc

$$\gamma = -\gamma', \qquad \alpha = -\alpha'.$$

Si $\alpha'$ était moindre que $\gamma'$, $\beta$ devait être entier et négatif pour que la pre-

mière fonction eût un sens, et, si l'on pose

$$\beta = -\beta',$$

$\beta'$ devrait être moindre que $\gamma'$. Dans ces conditions, on reconnaît immédiatement que le second membre de l'identité (1) s'annulerait pour $x = 1$, et que cela n'aurait pas lieu pour le premier; les deux membres ne seraient donc pas identiques.

Soit maintenant

$$\alpha' < \gamma'.$$

Le second membre est entier en $x$; si on l'ordonne suivant les puissances de $x$, le coefficient de $x^k$ est

$$(2) \qquad \frac{\alpha'(\alpha'-1)\ldots(\alpha'-k+1)}{1.2\ldots k} \mathrm{F}(-k, \gamma-\beta, \gamma, 1),$$

$k$ ne dépassant pas $\alpha'$ et étant, par suite, moindre que $\gamma'$, cette fonction a toujours un sens.

Or la dérivée d'ordre $k$ de

$$(-1)^k x^{-(\gamma'-k+1)} x^{\gamma'+\beta}$$

pour $x = 1$ est égale à

$$\gamma'(\gamma'-1)\ldots(\gamma'-k+1)\,\mathrm{F}(-k, \gamma-\beta, \gamma, 1)$$

et à

$$(-1)^k(k+\beta-1)(k+\beta-2)\ldots\beta.$$

Donc

$$\mathrm{F}(-k, \gamma-\beta, \gamma, 1) = (-1)^k \frac{(k+\beta-1)(k+\beta-2)\ldots\beta}{\gamma'(\gamma'-1)\ldots(\gamma'-k+1)};$$

d'où il suit que le coefficient (2) est le même que le coefficient de $x^k$ dans le premier membre de (1). Les deux fonctions sont donc identiques, quels que soient $\beta$ et $x$.

Si $\alpha'$ était égal à $\gamma'$, la fonction $\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ aurait besoin d'être précisée. Que si l'on convenait de la limiter au terme en $x^{\alpha'}$, les conclusions précédentes s'appliqueraient encore. Ce sera le cas dans les applications que nous ferons plus loin; mais, au point de vue purement algébrique, cette convention est arbitraire.

4. Ce lemme nous servira à transformer très simplement les expressions que nous allons obtenir pour solutions des problèmes (1) et (2). Ces solu-

tions, ainsi que celle du problème (3), résultent sans effort de la considération suivante due à Euler, et sur laquelle mon attention a été attirée par M. Jules Tannery.

Le nombre $C_m$ est le coefficient de $x^m$ dans le produit

$$(1+x+x^2+\ldots)^p(1+x^2+x^4+\ldots)^q$$

ou dans le développement de

$$\frac{1}{(1-x)^{p+q}(1+x)^q}$$

en une série procédant suivant la puissance de $x$.

En observant qu'à une valeur $\beta_k$ correspondent $\beta+1$ valeurs de $\beta_k$, on voit de même que le nombre $B_m$ est le coefficient de $x^m$ dans le produit

$$(1+2x+3x^2+\ldots)^p(1+2x^2+3x^4+\ldots)^q$$

ou dans le développement de

$$\frac{1}{(1-x)^{2p+2q}(1+x)^{2q}},$$

de sorte que la solution du second problème s'obtiendra en remplaçant $p$ par $2p$ et $q$ par $2q$ dans le premier.

Enfin la solution du troisième problème est le coefficient de $x^m$ dans

$$(1+2x+2x^2+\ldots)^p(1+2x^2+2x^4+\ldots)^q$$

ou dans le développement de

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^p\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^q,$$

développement qui a des formes diverses suivant que $p$ est plus grand que $q$, égal ou inférieur à $q$, mais dont la recherche se ramène dans tous les cas aux précédents.

Nous nous occuperons d'abord du premier problème pour en donner la solution complète, d'où la solution des deux suivants résultera immédiatement.

5. Soit $A_m$ le nombre cherché. On forme aisément une équation récurrente à laquelle $A_m$ doit satisfaire. Si, en effet, on pose

$$y(1-x)^{p+q}(1+x)^q = 1,$$

d'où

$$y'(1-x^2) - y[p + (p+2q)x] = 0,$$

on obtient, en différentiant $m-1$ fois et faisant $x=0$,

$$y_0^{(m)} - p y_0^{(m-1)} - (m-1)(m+p+2q-2) y_0^{m-2} = 0.$$

Or

$$y_0^m = A_m . 1.2.3 \ldots m;$$

d'où

$$(3) \qquad m A_m - p A_{m-1} - (m+p+2q-2) A_{m-2} = 0.$$

Si l'on remplace $m$ par $m+1$ et par $m+2$, et qu'on élimine entre les trois équations $A_{m-1}$ et $A_{m+1}$, on trouve une équation qui peut s'écrire des quatre manières suivantes :

$$(4) \begin{cases} (m+1)(m+2) A_{m+2} \\ \quad -[m(m+p+2q-1) + (m+1)(m+p+2q)] A_m \\ \qquad + (m+p+2q-1)(m+p+2q-2) A_{m-2} = p^2 A_m, \\ (m+1)(m+2) A_{m+2} \\ \quad -[(m-1)(m+p+2q-1) + (m+2)(m+p+2q)] A_m \\ \qquad + (m+p+2q-1)(m+p+2q-2) A_{m-2} = (p^2-1^2) A_m, \\ (m+1)(m+2) A_{m+2} \\ \quad -[(m+2)(m+p+2q+1) + (m-1)(m+p+2q-2)] A_m \\ \qquad + (m+p+2q-1)(m+p+2q-2) A_{m-2} = (p^2-2^2) A_m, \\ (m+1)(m+2) A_{m+2} \\ \quad -[(m+1)(m+p+2q+1) + m(m+p+2q-2)] A_m \\ \qquad + (m+p+2q-1)(m+p+2q-2) A_{m-2} = (p^2-1^2) A_m. \end{cases}$$

Ces quatre formules nous serviront à démontrer l'exactitude de l'expression qui représente la solution de notre problème; pour la recherche de ce résultat, il est plus simple de procéder comme il suit.

6. La décomposition en fractions simples permet d'écrire la fonction

$$\frac{1}{(1-x)^{p+q}(1+x)^q}$$

sous la forme

$$\sum \frac{M_h}{(1-x)^h} + \sum \frac{N_k}{(1+x)^k}.$$

En appliquant ensuite la formule du binôme à chacun des termes, on

trouve, pour le coefficient de $x^m$, l'expression

$$A_m = \frac{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+2q-2)}{1.2\ldots(q-1)} \frac{1}{2^{p+2q-1}} P_m,$$

où

$$P_m = F[m+1, -(p+q-1), -(p+2q-2), 2] \pm F[m+1, -(q-1), -(p+2q-2), 2],$$

$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ désignant comme ci-dessus la fonction hypergéométrique de Gauss. Le signe supérieur convient au cas où $m$ est pair, le signe inférieur au cas où $m$ est impair. Nous allons appliquer à $P_m$ les résultats obtenus au n° 3.

7. D'après ce numéro, si l'on remplace, dans les deux termes de $P_m$, $m$ par un nombre entier et négatif $\mu$ dont la valeur absolue ne dépasse pas $p+2q-1$, on a

$$F[\mu+1, -(p+q-1), -(p+2q-2), 2] = (-1)^{\mu+1} F[\mu+1, -(q-1), -(p+2q-2), 2].$$

Il s'ensuit que, si $\mu$ est pair, les deux fonctions sont égales et de signes contraires, et $P_m$ est nul si $m$ est pair; si, au contraire, $\mu$ est impair, les deux fonctions sont égales, et $P_m$ est nul si $m$ est impair. En outre, dans le cas où $m$ est pair, $P_m$ est le double de chacune des fonctions pour les valeurs impaires de $\mu$, et, si $m$ est impair, $P_m$, pour les valeurs paires de $\mu$, est double de la première ou égal au double de la seconde changée de signe; de sorte que, si $m$ est pair, on a

$$(5) \quad \begin{cases} P_m = (m+2)(m+4)\ldots(m+p+2q-2)Q_m & \text{si } p \text{ est pair} \\ \text{ou} \\ P_m = (m+2)(m+4)\ldots(m+p+2q-1)Q_m & \text{si } p \text{ est impair,} \end{cases}$$

$Q_m$ étant un polynôme du degré $\frac{p}{2}$ dans le premier cas, du degré $\frac{p-1}{2}$ dans le second cas; et, pour les valeurs suivantes de $m$

$$-1, \quad -3, \quad -5, \quad \ldots, \quad -(p+2q-1) \qquad (p \text{ pair})$$

ou

$$-1, \quad -3, \quad -5, \quad \ldots, \quad -(p+2q-2) \qquad (p \text{ impair}),$$

$P_m$ est égal à deux fois la fonction

$$(6) \qquad \Phi = F[m+1, -(q-1), -(p+2q-2), 2].$$

Si, au contraire, $m$ est impair,

$$(7)\quad \begin{cases} P_m = (m+1)(m+3)\ldots(m+p+2q-1)Q_m & (p \text{ pair}), \\ P_m = (m+1)(m+3)\ldots(m+p+2q-2)Q_m & (p \text{ impair}), \end{cases}$$

$Q_m$ est du degré $\frac{p-2}{2}$ dans le premier cas, du degré $\frac{p-1}{2}$ dans le second, et, pour les valeurs suivantes de $m$

$$\begin{array}{ll} -2,\quad -4,\quad \ldots,\quad -(p+2q-2) & (p \text{ pair}), \\ -2,\quad -4,\quad \ldots,\quad -(p+2q-1) & (p \text{ impair}), \end{array}$$

$-P_m$ est égal à deux fois la fonction $\Phi$.

Pour les valeurs les plus simples de $p$, ces considérations donnent sans effort l'expression de $P_m$. Nous ferons successivement $p=0$, $p=1$, $p=2$, $p=3$. Les résultats obtenus dans ces deux derniers cas nous mettront sur la voie du procédé qui donne le résultat dans le cas général.

8 (A). Soient $p=0$ et $m$ pair. $Q_m$ est une constante; si l'on fait $m=-1$, $\Phi$ est égale à 1, donc $P_m$ doit être égal à 2; il s'ensuit que

$$P_m = 2\,\frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2q-2)}{1.3\ldots 2q-3},$$

d'où

$$A_m = \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2q-2)}{2.4\ldots 2q-2};$$

si $m$ est impair, $P_m$ est nul.

(B). Soit $p=1$, $Q_m$ est encore une constante. Il s'ensuit que, si $m$ est pair,

$$P_m = 2\,\frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2q)}{1.3\ldots 2q-1},$$

$$A_m = \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2q)}{2.4\ldots 2q},$$

et, si $m$ est impair,

$$P_m = 2\,\frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+2q-1)}{1.3\ldots 2q-1},$$

$$A_m = \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+2q-1)}{2.4\ldots 2q},$$

de sorte que, dans le cas de $p=1$, $A_m$ est le même pour une valeur paire de $m$ et pour le nombre impair immédiatement supérieur.

(C). Soit $p = 2$. Si $m$ est pair, $Q_m$ est du premier degré; la considération des valeurs que prend $P_m$ pour $m = -1$ et pour $m = -3$ fait connaître $Q_m$. On trouve ainsi

$$P_m = \frac{2}{q}\,\frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2q)}{1.3\ldots(2q-1)}\,(q+m+1),$$

$$A_m = \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2q)(q+m+1)}{4.6\ldots(2q+2)}.$$

Si $m$ est impair, $Q_m$ est une constante; on trouve

$$P_m = \frac{2}{q}\,\frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+2q+1)}{1.3\ldots 2q-1},$$

$$A_m = \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+2q+1)}{4.6\ldots(2q+2)}.$$

L'introduction du facteur $q+m+1$ qui, dans le cas de $m$ pair, vient prendre place exactement au milieu des autres facteurs du numérateur de $P_m$, résulte d'une relation simple entre des séries hypergéométriques; en effet, on a, pour $p = 2$ et $m = -(q+1)$,

$$P_m = F[-q, -(q+1), -2q, 2] + F[-q, -(q-1), -2q, 2].$$

Or la relation connue

$$\gamma F(\alpha, \beta, \gamma, x) - \gamma(1-x) F(\alpha+1, \beta+1, \gamma, x)$$
$$= (\gamma - \alpha - \beta - 1) x F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x)$$

donne ici

$$P_m = 0.$$

Mais ces considérations ne peuvent être généralisées.

(D). Soit $p = 3$. Si $m$ est pair, $Q_m$ est du premier degré, et l'on trouve par la méthode générale

$$P_m = \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2q+2)}{1.3.5\ldots(2q+1)}\,\frac{(4m+4+2q)}{q},$$

$$A_m = \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2q+2)}{2.4\ldots(2q+4)}\,(2q+4m+4).$$

Si $m$ est impair, $Q_m$ est encore du premier degré et l'on trouve

$$P_m = \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+2q+1)}{1.3\ldots(2q+1)}\,\frac{1}{q}\,(6q+4m+8),$$

$$A_m = \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+2q+1)}{2.4\ldots(2q+4)}\,(6q+4m+8).$$

L'examen attentif des valeurs de $Q_m$ pour $p=2$ et $p=3$ suggère pour le cas général la marche suivante.

9. Si $m$ est pair, on posera

$$Q_m = \alpha + \beta(m+1) + \gamma(m+1)(m+3) + \delta(m+1)(m+3)(m+5) + \ldots,$$

et si $m$ est impair

$$Q_m = \alpha + \beta(m+2) + \gamma(m+2)(m+4) + \delta(m+2)(m+4)(m+6) + \ldots.$$

Les considérations indiquées au n° 7 et appliquées au n° 8 donnent successivement les valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, .... On trouve ainsi les résultats suivants :

1° $m$ pair, $p$ pair,

$$P_m = 2\,\frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+p+2q-2)}{1.3\ldots(p+2q-3)}\,Q_m^{(1)},$$

où

$$Q_m^{(1)} = 1 + \frac{p^2}{p+2q-2}\,\frac{m+1}{1.2} + \frac{p^2(p^2-2^2)}{(p+2q-2)(p+2q-4)}\,\frac{(m+1)(m+3)}{1.2.3.4}$$
$$+ \frac{p^2(p^2-2^2)(p^2-4^2)}{(p+2q-2)(p+2q-4)(p+2q-6)}\,\frac{(m+1)(m+3)(m+5)}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

2° $m$ pair, $p$ impair

$$P_m = 2\,\frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+p+2q-1)}{1.3\ldots(p+2q-2)}\,Q_m^{(2)},$$

où

$$Q_m^{(2)} = 1 + \frac{p^2-1^2}{p+2q-3}\,\frac{m+1}{1.2} + \frac{(p^2-1^2)(p^2-3^2)}{(p+2q-3)(p+2q-5)}\,\frac{(m+1)(m+3)}{1.2.3.4} + \ldots.$$

3° $m$ impair, $p$ pair,

$$P_m = \frac{2p}{p+2q-2}\,\frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+p+2q-1)}{1.3\ldots(p+2q-3)}\,Q_m^{(3)},$$

où

$$Q_m^{(3)} = 1 + \frac{(m+2)(p^2-2^2)}{2.3(p+2q-4)} + \frac{(m+2)(m+4)(p^2-2^2)(p^2-4^2)}{2.3.4.5(p+2q-4)(p+2q-6)} + \ldots.$$

4° $m$ impair, $p$ impair,

$$P_m = \frac{2p}{p+2q-2}\,\frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+p+2q-2)}{1.3\ldots(p+2q-4)}\,Q_m^{(4)}.$$

où

$$Q_m^4 = 1 + \frac{(m+2)(p^2-1^2)}{2.3(p+2q-3)} + \frac{(m+2)(m+4)(p^2-1^2)(p^2-3^2)}{2.3.4.5(p+2q-3)(p+2q-5)} + \ldots.$$

**10.** On conclut de là, pour $A_m$, les valeurs suivantes :

$$A_m^1 = \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+p+2q-2)}{2.4\ldots(2q-2)(p+2q)(p+2q+2)\ldots(2p+2q-2)} Q_m^1,$$

$$A_m^2 = \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+p+2q-1)}{2.4\ldots(2q-2)(p+2q-1)(p+2q+1)\ldots(2p+2q-2)} Q_m^{(2)},$$

$$A_m^3 = \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+p+2q-1)}{2.4\ldots(2q-2)(p+2q)(p+2q+2)\ldots(2p+2q-2)} Q_m^3 \frac{p}{(p+2q-2)},$$

$$A_m^4 = \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+p+2q-2)p}{2.4\ldots(2q-2)(p+2q-1)(p+2q+1)\ldots(2p+2q-2)} Q_m^4.$$

**11.** La démonstration complète de ces formules repose sur l'équation récurrente (3), ou sur les équations (4) auxquelles elles satisfont.

La vérification de l'équation (3) est immédiate; une simple soustraction montre que

$$mA_m - (m+p+2q-2)A_{m-2} = pA_{m-1},$$

si $m$ et $p$ sont pairs.

Si $m$ est pair et $p$ est impair, on a

$$mA_m^2 - (m+p+2q-2)A_{m-2}^2 = \frac{1}{4}(m+2)(m+4)\ldots(m+p+2q-3)$$
$$\times[(m+p+2q-1)Q_m^2 - (m+p+2q-2)Q_{m-2}^2].$$

Ce dernier crochet est

$$\sum \frac{(p^2-1^2)(p^2-3^2)\ldots(p^2-\overline{2i-1}^2)}{(p+2q-3)(p+2q-5)\ldots(p+2q-2i-1)} \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+2i-3)}{1.2.3\ldots2i}$$
$$\times[(m+2i-1)(m+p+2q-1)-(m-1)(m+p+2q-2)].$$

La dernière parenthèse est

$$(2i+1)(m+2i-1)+2i(p+2q-2i-1),$$

en dédoublant le terme et groupant la seconde partie de ce terme avec la



première du précédent correspondant à $i-1$, on trouve

$$\frac{(p^2-1^2)\ldots(p^2-\overline{2i-3}^2)}{(p+2q-3)\ldots(p+2q-2i+1)}\,\frac{(m+1)(m+3)\ldots(2i-3)}{1.2.3\ldots(2i-2)}\left[(2i-1)+\frac{p^2-\overline{2i-1}^2}{2i-1}\right],$$

ce qui est le terme général de $A^4_{m-1}$.

Soient $m$ impair et $p$ pair :

$$mA^3_m-(m+p+2q-2)A^3_{m-2}$$
$$=\frac{1}{N}(m+1)(m+3)\ldots(m+p+2q-3)\,\frac{p}{p+2q-2}\times H,$$

où

$$H=Q^3_m\,m(m+p+2q-1)-(m-1)(m+p+2q-2)\,Q^3_{m-2}$$
$$=\sum\frac{(p^2-2^2)\ldots(p^2-2i^2)\,m(m+2)\ldots(m+2i-2)}{2.3.(2i+1)(p+2q-4)\ldots(p+2q-2i-2)}$$
$$\times[(m+2i)(m+p+2q-1)-(m-1)(m+p+2q-2)];$$

ce crochet est

$$(m+2i)(2i+2)+(2i+1)(p+2q-2i-2);$$

en groupant la deuxième partie de ce terme avec la première du précédent, on trouve

$$\frac{(p^2-2^2)\ldots(p^2-\overline{2i-2}^2)\,m(m+2)-(m+2i-2)}{2.3.(2i-1)(p+2q-4)\ldots(p+2q-2i)}\left[2i+\frac{(p^2-2i^2)}{2i}\right],$$

ce qui est le terme général de $pA^1_{m-1}$.

Soient enfin $m$ impair et $p$ impair :

$$mA^4_m-(m+p+2q-2)A^4_{m-2}$$
$$=\frac{p}{N}(m+1)(m+3)\ldots(m+p+2q-2)[mQ^4_m-(m-1)Q^4_{m-2}].$$

Il suffit d'écrire ce dernier crochet ainsi :

$$m(Q^4_m-Q^4_{m-2})+Q^4_{m-2},$$

pour s'assurer de l'identité à démontrer.

Il n'est pas plus difficile de vérifier directement que les quatre fonctions $A_m$ satisfont à l'équation récurrente (4); il suffit d'utiliser à cet effet, dans les quatre cas particuliers, les quatre formes de cette équation; si $p$ est

pair, $A_m^1$ et $A_m^2$ sont des solutions de cette équation (4); si $p$ est impair, $A_m^2$ et $A_m^1$; on a donc l'intégration complète de l'équation (4), intégration qu'il ne paraît pas aisé d'obtenir directement.

**12.** Si l'on obtient directement $A_m$, on aura des identités algébriques intéressantes.

Soit, par exemple, $m = 0$, ce qui donne évidemment $A_m = 1$. On obtient alors :

Si $p$ est pair,

$$\frac{(p+2q)(p+2q+2)\ldots(2p+2q-2)}{2q(2q+2)\ldots(p+2q-2)}$$
$$= 1 + \frac{p^2}{p+2q-2}\,\frac{1}{2} + \frac{p^2(p^2-2^2)}{(p+2q-2)(p+2q-4)}\,\frac{1}{2.4} + \ldots;$$

Si $p$ est impair,

$$\frac{(p+2q+1)(p+2q+3)\ldots(2p+2q-2)}{2q(2q+2)\ldots(p+2q-3)}$$
$$= 1 + \frac{p^2-1^2}{p+2q-3}\,\frac{1}{2} + \frac{(p^2-1^2)(p^2-3^2)}{(p+2q-3)(p+2q-5)}\,\frac{1}{2.4} + \ldots.$$

Si l'on fait $m = 1$, ce qui donne aussi $A_m = p$, on trouve :

Si $p$ est pair,

$$\frac{(p+2q+2)(p+2q+4)\ldots(2p+2q-2)}{2q(2q+2)\ldots(p+2q-4)}$$
$$= 1 + \frac{p^2-2^2}{p+2q-4}\,\frac{1}{2} + \frac{(p^2-2^2)(p^2-4^2)}{(p+2q-4)(p+2q-6)}\,\frac{1}{2.4} + \ldots;$$

Si $p$ est impair,

$$\frac{(p+2q+1)(p+2q+3)\ldots(2p+2q-2)}{2q(2q+2)\ldots(p+2q-3)}$$
$$= 1 + \frac{p^2-1^2}{p+2q-3}\,\frac{1}{2} + \frac{(p^2-1^2)(p^2-3^2)}{(p+2q-3)(p+2q-5)}\,\frac{1}{2.4} + \ldots.$$

Les seconds membres sont des séries hypergéométriques de Gauss.

**13.** Les résultats obtenus au n° 10 donnent la solution complète de notre premier problème, et, en remplaçant dans la première et la troisième formule $p$ par $2p$ et $q$ par $2q$, celle du second.

A l'égard du troisième, il y a lieu d'examiner successivement les cas où $p$ est plus grand que $q$, moindre que $q$ ou égal à $q$.

Ce dernier cas est le plus simple : le nombre cherché est le coefficient de $x^m$ dans le développement de

$$\frac{(1+x^2)^p}{(1-x)^{2p}};$$

c'est

$$\frac{1}{1.2\ldots 2p-1}\left[(m+1)(m+2)\ldots(m+2p-1)+\frac{p}{1}(m-1)m\ldots(m+2p-3)\right.$$
$$\left.+\frac{p(p-1)}{1.2}(m-3)\ldots(m+2p-5)+\ldots\right].$$

C'est un polynôme entier en $m$, du degré $2p-1$.

Soit en second lieu $p>q$; il faut trouver le coefficient de $x^m$ dans

$$\frac{(1+x)^{p-q}(1+x^2)^q}{(1-x)^{p+q}}.$$

Cherchons d'abord celui $H_m$ de $\frac{(1+x)^{p-q}}{(1-x)^{p+q}}$,

$$H_m=\frac{1}{1.2\ldots p+q-1}\left[(m+1)(m+2)\ldots(m+p+q-1)\right.$$
$$+\frac{p-q}{1}m(m+1)\ldots(m+p+q-2)$$
$$\left.+\frac{(p-q)(p-q-1)}{1.2}(m-1)m\ldots(m+p+q-3)+\ldots\right].$$

Le nombre cherché est visiblement

$$H_m+\frac{q}{1}H_{m-2}+\frac{q(q-1)}{1.2}H_{m-4}+\ldots.$$

Soit enfin $p<q$; il faut trouver le coefficient de $x^m$ dans

$$\frac{(1+x^2)^q}{(1-x)^{p+q}(1+x)^{q-p}}.$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{(1-x)^{q+p}(1+x)^{q-p}}=\sum K_m x^m,$$

le nombre cherché sera

$$K_m+\frac{q}{1}K_{m-2}+\frac{q(q-1)}{1.2}K_{m-4}+\ldots.$$

Quant à $K_m$ il est visiblement égal à la valeur que prend $A_m$ si l'on y remplace $q$ par $q-p$ et $p$ par $2p$.

Nous donnons ci-après l'application des formules générales à nos deux développements de la fonction perturbatrice obtenus dans le Mémoire cité.

Le nombre des coefficients distincts est dans le premier ($p=2$, $q=4$),

$$A_m = \frac{m(m+2)\ldots(m+8)}{4.6.8.10} + \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+8)}{2.4.6.8} \qquad (m \text{ pair}),$$

$$A_m = \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+9)}{4.6.8.10} \qquad (m \text{ impair}).$$

Désignant par $\mathcal{A}_m$ la somme $A_m + A_{m-2} + A_{m-4} + \ldots$, c'est-à-dire le nombre des coefficients dont l'ordre ne dépasse pas $m$ en restant de même parité, on a immédiatement

$$\mathcal{A}_m = \frac{m(m+2)\ldots(m+10)}{4.6\ldots12} + \frac{(m+2)\ldots(m+10)}{2.4\ldots10} \qquad (m \text{ pair}).$$

$$\mathcal{A}_m = \frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+11)}{4.6\ldots12} \qquad (m \text{ impair}).$$

Dans l'application de la seconde formule ($p=2$, $q=2$), on trouve

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \frac{(m+2)(m+3)(m+4)}{24} \\ \mathcal{A}_m &= \frac{m(m+2)\ldots(m+6)}{4.6.8} + \frac{(m+2)(m+4)(m+6)}{2.4.6} \end{aligned}\right\} \qquad (m \text{ pair}),$$

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \frac{(m+1)(m+3)(m+5)}{24} \\ \mathcal{A}_m &= \frac{(m+1)(m+3)(m+5)(m+7)}{4.6.8} \end{aligned}\right\} \qquad (m \text{ impair}).$$

Le nombre total $B_m$ des termes d'ordre $m$, et le nombre $\mathcal{B}_m$ des termes dont l'ordre, de même parité que $m$, ne dépasse pas $m$, sont pour la première formule

$$\left.\begin{aligned} B_m &= 8\,\frac{m(m+2)\ldots(m+20)}{2.4\ldots22} + \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+18)}{2.4\ldots18} \\ \mathcal{B}_m &= 8\,\frac{m(m+2)\ldots(m+22)}{2.4\ldots24} + \frac{(m+2)\ldots(m+20)}{2.4\ldots20} \end{aligned}\right\} \qquad (m \text{ pair}),$$

$$\left.\begin{aligned} B_m &= 8\,\frac{(m-1)(m+1)\ldots(m+19)}{2.4\ldots22} + 4\,\frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+19)}{2.4\ldots20} \\ \mathfrak{B}_m &= 8\,\frac{(m-1)\ldots(m+21)}{2.4\ldots24} + 4\,\frac{(m+1)(m+3)\ldots(m+21)}{2.4\ldots22} \end{aligned}\right\} (m \text{ impair}),$$

et pour la seconde formule

$$\left.\begin{aligned} B_m &= 8\,\frac{m(m+2)\ldots(m+12)}{2.4\ldots14} + \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+10)}{2.4\ldots10}, \\ \mathfrak{B}_m &= 8\,\frac{m(m+2)\ldots(m+14)}{2.4\ldots16} + \frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+12)}{2.4\ldots12} \end{aligned}\right\} (m \text{ pair});$$

$$\left.\begin{aligned} B_m &= 8\,\frac{(m+1)(m+3)(m+5)(m+6)(m+7)(m+9)(m+11)}{2.4\ldots14}, \\ \mathfrak{B}_m &= 8\,\frac{(m+1)(m+3)(m+5)(m+7)^2(m+9)(m+11)(m+13)}{2.4\ldots16} \end{aligned}\right\} (m \text{ impair}).$$

Pour le nombre des arguments, dans le cas de la première formule, il est, à partir de $m=8$,

$$C_m = K_m + 4K_{m-2} + 6K_{m-4} + 4K_{m-6} + K_{m-8},$$

$K_m$ étant ce que devient $C_m$ quand on y remplace $p$ par 4 et $q$ par 2.

On trouve, pour $m$ pair,

$$K_m = 8\,\frac{m(m+2)\ldots(m+8)}{2.4\ldots10} + \frac{(m+2)(m+4)(m+6)}{2.4.6}.$$

Cette valeur de $K_m$ s'annulant pour les valeurs $-2$, $-4$, $-6$, la valeur de $C_m$ est encore exacte pour $m = 2, 4, 6$. On obtient

$$C_m = \frac{m(m^4+30m^2+104)}{30},$$

qui, pour $m=0$, doit être remplacée par 1. La somme des valeurs de $C_m$ pour $m = 0, 2, 4, \ldots, m$ est

$$\mathfrak{C}_m = 1 + \frac{m(m+2)(m^4+4m^3+47m^2+86m+312)}{360}.$$

Dans le cas de $m$ impair, on trouve

$$K_m = \frac{(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)(m+7)}{6.8.10}.$$

L'expression $C_m$ donnée plus haut est encore valable pour $m = 7, 5, 3, 1$, en raison de ce que $K_m$ s'annule pour $m = -1, -3, -5, -7$, et l'on a

$$C_m = \frac{m(m^4 + 30m^2 + 89)}{30},$$

et la somme totale pour $m = 1, 3, \ldots, m$ est

$$\mathfrak{C}_m = \frac{(m+1)(m^5 + 5m^4 + 50m^3 + 130m^2 + 309m + 225)}{360}.$$

Pour la seconde formule, on a

$$C = \frac{1}{1.2.3}[(m+1)(m+2)(m+3)$$
$$+ 2(m-1)m(m+1) + (m-3)(m-2)(m-1)] = \frac{2m^3 + 10m}{3},$$

dont l'intégrale est

$$\mathfrak{C}_m = \frac{m^4 + 2m^3 + 11m^2 + 10m}{6} + 1.$$

Le Tableau suivant donne les valeurs des nombres $A_m$, $B_m$, $C_m$, $\mathcal{A}_m$, $\mathcal{B}_m$, $\mathfrak{C}_m$ pour les valeurs paires et pour les valeurs impaires de $m$ jusqu'à $m = 15$ et pour les deux formules :

*Première formule.*

| $m$. | $A_m$. | $\mathcal{A}_m$. | $B_m$. | $\mathcal{B}_m$. | $C_m$. | $\mathfrak{C}_m$. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 7 | 8 | 18 | 19 | 16 | 17 |
| 4 | 27 | 35 | 151 | 170 | 112 | 129 |
| 6 | 77 | 112 | 844 | 1014 | 496 | 625 |
| 8 | 182 | 294 | 3627 | 4641 | 1632 | 2257 |
| 10 | 378 | 672 | 12922 | 17563 | 4368 | 6625 |
| 12 | 714 | 1386 | 39949 | 57512 | 10064 | 16689 |
| 14 | 1254 | 2640 | 110448 | 167960 | 20720 | 37409 |
| 1 | 2 | 2 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 12 | 14 | 52 | 56 | 44 | 48 |
| 5 | 42 | 56 | 360 | 416 | 244 | 292 |
| 7 | 112 | 168 | 1768 | 2184 | 924 | 1216 |
| 9 | 252 | 420 | 6916 | 9100 | 2724 | 3940 |
| 11 | 504 | 924 | 22932 | 32032 | 6732 | 10672 |
| 13 | 924 | 1848 | 66976 | 99008 | 14612 | 25284 |
| 15 | 1584 | 3432 | 176800 | 275808 | 28732 | 54016 |

La deuxième formule donne le Tableau suivant :

| $m$. | $C_m$. | $\mathcal{C}_m$. | $B_m$. | $\mathcal{B}_m$. | $A_m$. | $\mathcal{A}_m$. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 12 | 13 | 14 | 15 | 5 | 6 |
| 4 | 56 | 69 | 85 | 100 | 14 | 20 |
| 6 | 164 | 233 | 344 | 444 | 30 | 50 |
| 8 | 368 | 601 | 1086 | 1530 | 55 | 105 |
| 10 | 700 | 1301 | 2892 | 4422 | 91 | 196 |
| 12 | 1192 | 2493 | 6798 | 11220 | 140 | 336 |
| 14 | 1876 | 4369 | 14520 | 25740 | 204 | 540 |
| 1 | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 | 2 |
| 3 | 28 | 32 | 36 | 40 | 8 | 10 |
| 5 | 100 | 132 | 176 | 216 | 20 | 30 |
| 7 | 252 | 384 | 624 | 840 | 40 | 70 |
| 9 | 516 | 900 | 1800 | 2640 | 70 | 140 |
| 11 | 924 | 1824 | 4488 | 7128 | 112 | 252 |
| 13 | 1508 | 3332 | 10032 | 17160 | 168 | 420 |
| 15 | 2300 | 5632 | 20592 | 37752 | 240 | 660 |

Pour les huit premiers ordres, on a, par la deuxième formule,

175 coefficients,
985 arguments,
2370 termes

et, par la première,

462 coefficients,
3472 arguments,
5395 termes.

Pour les quinze premiers ordres qu'il faudrait envisager si l'on voulait obtenir le développement de la grande inégalité de Pallas, on a, par la deuxième formule, 1200 coefficients, 10001 arguments et 63492 termes et, par la première, 6072 coefficients, 91424 arguments et 443768 termes correspondant à la seule valeur $\gamma = 0$.

Ces résultats montrent bien l'importance de la transformation qui permet d'obtenir le second développement; nous allons montrer qu'elle est toujours possible dans le système solaire.

# DEUXIÈME PARTIE.

2. La transformation indiquée au n° 14 de notre premier Mémoire consiste à poser

$$(1) \qquad a'^2 + a_1'^2 = a^2 + a_1^2 + c,$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2a'a'_1 \cos^2\frac{J'}{2}\cos(H'-H) &= 2aa_1\cos^2\frac{J}{2} - d\cos(D+H), \\ 2a'a'_1 \cos^2\frac{J'}{2}\sin(H'-H) &= d\sin(D+H), \\ 2a'a'_1 \sin^2\frac{J'}{2}\cos(K'-K) &= 2aa_1\sin^2\frac{J}{2} - d_1\sin(D_1+K), \\ 2a'a'_1 \sin^2\frac{J'}{2}\sin(K'-K) &= d_1\sin(D_1+K). \end{aligned} \right.$$

Nous rappelons d'ailleurs les définitions des quantités $c$, $d$, $D$, $d_1$, $D_1$. En posant, pour abréger,

$$1 - \sqrt{1-e_1^2} = \gamma,$$

$$1 - \sqrt{1-e_1^2} = \delta,$$

$$1 - \sqrt{1-e^2}\sqrt{1-e_1^2} = \beta,$$

d'où

$$\beta = \gamma + \delta - \gamma\delta;$$

$$\mathcal{A} = \cos^2\frac{J}{2}\cos H + \sin^2\frac{J}{2}\cos K,$$

$$\mathcal{B} = \cos^2\frac{J}{2}\cos H - \sin^2\frac{J}{2}\cos K,$$

$$\mathcal{C} = \cos^2\frac{J}{2}\sin H + \sin^2\frac{J}{2}\sin K,$$

$$\mathcal{D} = \cos^2\frac{J}{2}\sin H - \sin^2\frac{J}{2}\sin K,$$

on a

$$\frac{d}{aa_1}\cos D = \beta\mathcal{B},$$

$$\frac{d}{aa_1}\sin D = -\gamma\mathcal{C} - \delta\mathcal{D},$$

$$\frac{d_1}{aa_1}\cos D_1 = -\beta\mathcal{B},$$

$$\frac{d_1}{aa_1}\sin D_1 = -\gamma\mathcal{C} + \delta\mathcal{D},$$

$$c = \frac{a^2e^2}{2} + \frac{a_1^2e_1^2}{2} - 2\mathcal{A}aa_1ee_1.$$

3. Les équations (2) déterminent toujours, comme on sait, des valeurs positives de

$$2a'a'_1\cos^2\frac{J'}{2}, \qquad 2a'a'_1\sin^2\frac{J'}{2}$$

et des valeurs réelles de

$$H'-H, \qquad K'-K.$$

On en conclura pour $2a'a'_1$ et $J'$ des valeurs positives.

Ayant

$$2a'a'_1 = m,$$

on voit de suite que la condition nécessaire et suffisante, pour que l'on obtienne pour $a'$ et $a_1$ des valeurs positives, est

$$(3) \qquad a^2 + a_1^2 + c - m > 0.$$

4. On a, par les équations (2),

$$(4) \qquad 4a'^2a_1'^2\cos^4\frac{J'}{2} = 4a^2a_1^2\cos^4\frac{J}{2} - 4aa_1\cos^2\frac{J}{2}d\cos(D+H) + d^2,$$

$$(5) \qquad 4a'^2a_1'^2\sin^4\frac{J'}{2} = 4a^2a_1^2\sin^4\frac{J}{2} - 4aa_1\sin^2\frac{J}{2}d_1\cos(D_1+K) + d_1^2;$$

nous allons y remplacer $d\cos D$, $d\sin D$, $d_1\cos D_1$, $d_1\sin D_1$ par leurs valeurs ; on voit aisément que l'équation (5) se déduira de l'équation (4) en remplaçant H par K et K par H, $\cos^2\frac{J}{2}$ par $\sin^2\frac{J}{2}$ et *vice versa* $\cos^2\frac{J'}{2}$ par $\sin^2\frac{J'}{2}$.

On obtient, par simple substitution,

$$4\frac{a'^2 a_1'^2}{a^2 a_1^2}\cos^4\frac{J'}{2} = \frac{(2-\beta)^2+(2-\gamma-\delta)^2}{2}\cos^4\frac{J}{2} + \frac{\beta^2+(\gamma-\delta)^2}{2}\sin^4\frac{J}{2}$$
$$+\frac{\gamma\delta}{2}(2-\gamma)(2-\delta)\left(\cos^4\frac{J}{2}\cos 2H+\sin^4\frac{J}{2}\cos 2K\right)$$
$$+\frac{\delta}{4}(2-\delta)[(1-\gamma)^2+1]\sin^2 J\cos(H-K)$$
$$+\frac{\gamma}{4}(2-\gamma)[(1-\delta)^2+1]\sin^2 J\cos(H+K)$$

et

$$4\frac{a'^2 a_1'^2}{a^2 a_1^2}\sin^4\frac{J'}{2} = \frac{(2-\beta)^2+(2-\gamma-\delta)^2}{2}\sin^4\frac{J}{2} + \frac{\beta^2+(\gamma-\delta)^2}{2}\cos^4\frac{J}{2}$$
$$+\frac{\gamma\delta}{2}(2-\gamma)(2-\delta)\left(\cos^4\frac{J}{2}\cos 2H+\sin^4\frac{J}{2}\cos 2K\right)$$
$$+\frac{\delta}{4}(2-\delta)[(1-\gamma)^2+1]\sin^2 J\cos(H-K)$$
$$+\frac{\gamma}{4}(2-\gamma)[(1-\delta)^2+1]\sin^2 J\cos(H+K).$$

5. On voit de suite que ces fonctions ont leurs plus grandes valeurs pour

$$H=0,\qquad K=0,$$

car tous les coefficients sont positifs. Le terme $c$ a en même temps sa plus petite valeur. Il suffit et il est nécessaire que la condition (3) soit satisfaite pour ces valeurs de H et K.

On a alors

$$\mathcal{A}=1,\qquad \mathcal{B}=\cos J,\qquad \mathcal{C}=0,\qquad \mathcal{D}=0,$$
$$D=0,\qquad D_1=180^\circ,$$
$$H'=H,\qquad K'=K,$$
$$\frac{d}{aa_1}=\beta\cos J,\qquad \frac{d_1}{aa_1}=\beta\cos J,$$
$$2\frac{a'a_1'}{aa_1}\cos^2\frac{J'}{2}=1+(1-\beta)\cos J,$$
$$2\frac{a'a_1'}{aa_1}\sin^2\frac{J'}{2}=1-(1-\beta)\cos J,$$
$$2a'a_1'=2aa_1,$$

et la condition (3) devient

$$(a-a_1)^2+\frac{a^2e^2}{2}+\frac{a_1^2e_1^2}{2}-2aa_1ee_1>0.$$

6. On peut toujours supposer $a_1 < a$ et écrire l'expression précédente sous les deux formes

$$(a_1e_1-2ae)^2\quad-3a^2e^2+2(a-a_1)^2,$$
$$(ae\quad-2a_1e_1)^2-3a_1^2e_1^2+2(a-a_1)^2,$$

qui montrent qu'elle ne peut être négative que si

$$e>\sqrt{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{a_1}{a}\right),\qquad e_1>\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{a}{a_1}-1\right).$$

On a, pour Mars, les petites planètes extrêmes et, pour Jupiter, les valeurs suivantes du demi grand axe :

| | |
|---|---|
| Mars.................. | 1,52369 |
| (149) Méduse........... | 2,13275 |
| (153) Hilda............. | 3,95228 |
| Jupiter................ | 5,20280 |

Le minimum de $1-\frac{a_1}{a}$ et celui de $\frac{a}{a_1}-1$ ont lieu pour Hilda et Jupiter pour lesquels

$$1-\frac{a_1}{a}=0,24,\qquad \frac{a}{a_1}-1=0,32.$$

Il s'ensuit que les excentricités devraient être toutes plus grandes que 0,19; or cela n'a lieu pour aucune des grosses planètes. Donc les valeurs de $a'a'_1$ seront toujours réelles et positives, et la transformation est toujours possible.



# CONTRIBUTIONS

À LA

# THÉORIE DU CERCLE DANS L'ESPACE;

PAR M. G. KŒNIGS,
Maître de Conférences à l'École Normale.

Représentons par $S_1, S_2, \ldots, S_5$ les puissances d'un même point P de l'espace par rapport à cinq sphères orthogonales deux à deux, et de rayons $R_1, R_2, \ldots, R_5$; posons

$$\rho x_1 = \frac{S_1}{R_1}, \qquad \rho x_2 = \frac{S_2}{R_2}, \qquad \ldots, \qquad \rho x_5 = \frac{S_5}{R_5},$$

où $\rho$ est un facteur quelconque. Les quantités $x_i$ sont les coordonnées pentasphériques du point P; il existe entre elles la relation identique

$$(1) \qquad \sum x_i^2 = 0.$$

Toute sphère est représentée par une équation linéaire

$$(2) \qquad \sum a_i x_i = 0,$$

et tout cercle sera défini comme l'intersection de deux sphères,

$$(3) \qquad \sum a_i x_i = 0, \qquad \sum b_i x_i = 0.$$

Posons alors

$$(4) \qquad p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i,$$

en sorte qu'on ait

$$(5) \qquad p_{ii} = 0, \qquad p_{ki} = -p_{ik};$$

les quantités $p_{ik}$, au nombre de dix seulement, si l'on tient compte des

équations (5), seront les coordonnées du cercle (3). Ces quantités interviennent dans l'équation de chacune des sphères passant par le cercle et orthogonale à chacune des cinq sphères coordonnées. Par exemple, la sphère passant par le cercle (3) et orthogonale à la sphère $S_i$ a pour équation

$$p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \ldots + p_{i5}x_5 = 0.$$

Ces dix quantités $p_{ik}$ ne sont pas indépendantes. Il doit exister entre elles trois relations distinctes, car un cercle ne dépend dans l'espace que de six paramètres. Néanmoins nous allons être conduit à un plus grand nombre de relations non strictement identiques, comme on va le voir.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ les cinq premiers nombres écrits dans l'ordre de permutation naturelle 1, 2, 3, 4, 5 *à partir* de l'un d'eux, que nous appelons $\alpha$, et posons alors, d'une façon générale avec cette convention,

$$\Omega_\alpha = p_{\beta\gamma}p_{\delta\varepsilon} + p_{\beta\delta}p_{\varepsilon\gamma} + p_{\beta\varepsilon}p_{\gamma\delta}.$$

Il y a cinq quantités $\Omega_\alpha$, car $\alpha$ peut être 1, 2, 3, 4 ou 5.

On trouve sans peine que les quantités $p_{ik}$ vérifient, en vertu de leur définition, les relations

(6) $$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = 0, \quad \Omega_4 = 0, \quad \Omega_5 = 0,$$

et que réciproquement si des quantités $p_{ik}$ $\left(\text{où } \begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2, 3, 4 \text{ ou } 5\Big)$ vérifient à la fois les relations (5) et (6), ces quantités sont les coordonnées d'un cercle dans l'espace. On prouve pour cette réciproque que les cinq sphères

$$p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \ldots + p_{i5}x_5 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4 \text{ ou } 5)$$

se coupent suivant un même cercle en vertu des relations (5) et (6).

Restent maintenant les équations (6), qui sont au nombre de cinq et, en apparence du moins, ne laissent aux quantités homogènes $p_{ik}$ qu'une quadruple indétermination. En réalité, ces relations (6) ne sont pas toutes distinctes.

Employons le langage des espaces à plusieurs dimensions. Dix quantités $p_{ik}$ [vérifiant les relations (5)] sont les coordonnées homogènes ponctuelles dans un espace linéaire E à neuf dimensions, et l'équation $\Omega_i = 0$ représente dans l'espace E un espace *quadratique* à huit dimensions. Or on constate par un calcul facile que, dix quantités quelconques $p_{ik}$ étant

données, qui vérifient les équations (5), on a les identités

(7) $$p_{i1}\Omega_1 + p_{i2}\Omega_2 + p_{i3}\Omega_3 + \ldots + p_{i5}\Omega_5 = 0,$$

au nombre de cinq; et, en s'appuyant sur ces identités, on prouve alors que les cinq espaces quadratiques à huit dimensions $\Omega_1$, $\Omega_2$, ..., $\Omega_5$ ont en commun un espace à *six* dimensions qui est du *cinquième* degré.

A chaque point de cet espace $E_6^5$, du cinquième degré à six dimensions, répond un cercle de l'espace ordinaire, et inversement. Donc :

*La géométrie du cercle dans l'espace ordinaire coïncide avec celle du point dans un espace quintique à six dimensions contenu dans un espace linéaire à neuf dimensions.*

L'existence de cet espace $E_6^5$ commun aux espaces quadratiques $\Omega_1$, $\Omega_2$, ..., $\Omega_5$ explique comment les équations (6) laissent au cercle sa sextuple indétermination, bien que deux d'entre elles ne soient pas *strictement* une conséquence des trois autres.

Je passe rapidement sur ces faits faciles à établir, et qui ne sont pas nouveaux, puisqu'ils ont servi à M. Stéphanos dans ses deux Notes à l'Académie des Sciences sur les systèmes de cercles (¹).

## *Rencontre de deux cercles.*

Le but de ces notes rapides est de montrer l'utilité des cinq formes quadratiques $\Omega_i(p)$, que nous avons ci-dessus définies : on y verra plus d'une analogie avec la théorie des systèmes de droites.

Soient deux cercles $(p)$ et $(p')$; s'ils ont un point commun, P, les coordonnées pentasphériques de ce point doivent vérifier les équations

(8) $$\begin{cases} \sum_\omega p_{i\omega}\, x_\omega = 0, & \sum_\omega p_{k\omega}\, x_\omega = 0, \\ \sum_\omega p'_{m\omega}\, x_\omega = 0, & \sum_\omega p'_{n\omega}\, x_\omega = 0, \end{cases}$$

où $i$, $k$, $m$, $n$ sont quatre indices quelconques parmi les cinq premiers. La résolution de ces quatre équations (8) se fait de la façon la plus simple, comme il suit.

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

Posons

$$\Omega_i(p,p') = \Omega_i(p',p) = \frac{1}{2}\sum_{\omega\rho} \frac{\partial\Omega_i}{\partial p_{\omega,\rho}} p'_{\omega,\rho};$$

les équations (8) donnent alors

(9) $$\frac{x_1}{\Omega_1(p,p')} = \frac{x_2}{\Omega_2(p,p')} = \ldots = \frac{x_5}{\Omega_5(p,p')};$$

et comme $x_1, x_2, \ldots, x_5$ doivent vérifier l'équation (1), on a la condition de rencontre

(10) $$\sum_\omega [\Omega_\omega(p,p')]^2 = 0.$$

Si, au contraire, la rencontre des deux cercles a lieu en deux points, on peut faire passer une sphère par les deux cercles, et les quatre équations (8) doivent se réduire à trois distinctes; on en conclut que tous les dénominateurs des équations (9) sont nuls, et l'on a alors la condition

(11) $$\Omega_1(p,p') = 0, \quad \Omega_2(p,p') = 0, \quad \ldots, \quad \Omega_5(p,p') = 0.$$

Mais on constate encore ici, facilement, que ces cinq équations n'en comportent que *deux* distinctes.

### *Rencontre de cercles infiniment voisins.*

Si l'on veut, en particulier, que deux cercles infiniment voisins $(p)$ et $(p+dp)$ se rencontrent, on trouve, si la rencontre a lieu en deux points,

(11)' $$\Omega_1(dp) = 0, \quad \Omega_2(dp) = 0, \quad \Omega_3(dp) = 0, \quad \Omega_4(dp) = 0, \quad \Omega_5(dp) = 0;$$

et, si la rencontre n'a lieu qu'en un seul point, on a seulement

(10)' $$\sum_i [\Omega_i(dp)]^2 = 0.$$

C'est donc l'évanouissement d'une forme biquadratique des différentielles des coordonnées qui exprime la rencontre en un point unique; on en peut conclure tout de suite que les congruences de cercles n'ont généralement que quatre surfaces focales.

On voit par les formules (6), (10), (11), (10)', (11)' l'analogie avec la théorie classique des systèmes de droites.

*Une autre forme quadratique.*

Il est, outre les cinq formes quadratiques $\Omega_i$, une sixième forme qui, elle aussi, intervient utilement dans cette théorie.

Pour donner un exemple des calculs et des réductions que l'on rencontre dans cette question, cherchons le rayon d'un cercle donné $(p)$.

Je rappelle que le rayon $\rho$ d'une sphère $\sum a_i x_i = 0$ est donné par la formule

$$\rho^2 = \frac{\sum a_i^2}{\left(\sum \frac{a_i}{R_i}\right)^2};$$

cela étant, comme toute sphère passant par le cercle $(p)$ est représentée par l'équation $\sum (\lambda p_{\alpha i} + \mu p_{\beta i}) x_i = 0$, où $\alpha$, $\beta$ sont deux des indices 1, 2, 3, 4, 5 et $\lambda$, $\mu$ deux paramètres, le rayon de cette sphère aura pour carré

$$\rho^2 = \frac{\sum (\lambda p_{\alpha i} + \mu p_{\beta i})^2}{\left[\lambda \sum \frac{p_{\alpha i}}{R_i} + \mu \sum \frac{p_{\beta i}}{R_i}\right]^2}.$$

Cherchons le minimum de $\rho^2$ lorsque la sphère, et par suite $\lambda : \mu$, varie, ce minimum est le rayon du cercle $(p)$.

Sa détermination n'offre aucune difficulté ; on trouve

$$\rho^2 = \frac{-\left(\sum_i p_{\alpha i} p_{\beta i}\right)^2 + \left(\sum_i p_{\alpha i}^2\right)\left(\sum_i p_{\beta i}^2\right)}{\sum_i p_{\alpha i}^2 \left(\sum_i \frac{p_{\beta i}}{R_i}\right)^2 + \sum_i p_{\beta i}^2 \left(\sum_i \frac{p_{\alpha i}}{R_i}\right)^2 - 2 \sum \frac{p_{\alpha i}}{R_i} \sum \frac{p_{\beta i}}{R_i} \sum p_{\alpha i} p_{\beta i}}.$$

Cette expression se transforme facilement comme il suit.

On a d'abord

$$\left(\sum_i p_{\alpha i}^2\right)\left(\sum_i p_{\beta i}^2\right) - \left(\sum_i p_{\alpha i} p_{\beta i}\right)^2 = \sum_{ij} (p_{\alpha i} p_{\beta j} - p_{\alpha j} p_{\beta i})^2.$$

Mais on a aussi, en vertu de (6),

$$p_{\alpha i} p_{\beta j} - p_{\alpha j} p_{\beta i} = p_{\alpha\beta} p_{ij};$$

il vient donc

$$\left(\sum_i p_{\alpha i}^2\right)\left(\sum_i p_{\beta i}^2\right) - \left(\sum_i p_{\alpha i} p_{\beta i}\right)^2 = p_{\alpha\beta}^2 \sum_{ij} p_{ij}^2;$$

on a ensuite

$$\sum_j p_{\alpha j}^2 \left(\sum_i \frac{p_{\beta i}}{R_i}\right)^2 + \sum_j p_{\beta j}^2 \left(\sum_i \frac{p_{\alpha i}}{R_i}\right)^2 - 2\sum \frac{p_{\alpha i}}{R_i} \sum \frac{p_{\beta i}}{R_i} \sum p_{\alpha i} p_{\beta i}$$

$$= \sum_{ij} \frac{1}{R_i^2} (p_{\alpha j}^2 p_{\beta i}^2 + p_{\beta j}^2 p_{\alpha i}^2 - 2 p_{\alpha i} p_{\beta i} p_{\alpha j} p_{\beta j})$$

$$+ \sum_{ijk} \frac{2}{R_i R_k} (p_{\alpha j}^2 p_{\beta i} p_{\beta k} + p_{\beta j}^2 p_{\alpha i} p_{\alpha k} - p_{\alpha i} p_{\beta k} p_{\alpha j} p_{\beta j} - p_{\beta i} p_{\alpha k} p_{\alpha j} p_{\beta j}).$$

Or on a

$$p_{\alpha j}^2 p_{\beta i}^2 + p_{\beta j}^2 p_{\alpha i}^2 - 2 p_{\alpha i} p_{\beta i} p_{\alpha j} p_{\beta j} = (p_{\alpha j} p_{\beta i} - p_{\alpha i} p_{\beta j})^2 = p_{\alpha\beta}^2 p_{ij}^2,$$

$$p_{\alpha j}^2 p_{\beta i} p_{\beta k} + p_{\beta j}^2 p_{\alpha i} p_{\alpha k} - p_{\alpha i} p_{\beta k} p_{\alpha j} p_{\beta j} - p_{\beta i} p_{\alpha k} p_{\alpha j} p_{\beta j}$$

$$= (p_{\alpha j} p_{\beta i} - p_{\alpha i} p_{\beta j})(p_{\alpha j} p_{\beta k} - p_{\alpha k} p_{\beta j}) = p_{\alpha\beta}^2 p_{ij} p_{kj};$$

le dénominateur de $\rho^2$ s'écrit donc

$$p_{\alpha\beta}^2 \sum_{ij} \frac{p_{ij}^2}{R_i^2} + p_{\alpha\beta}^2 \sum_{ijk} \frac{2 p_{ij} p_{kj}}{R_i R_k} = p_{\alpha\beta}^2 \sum_j \left(\sum_i \frac{p_{ij}}{R_i}\right)^2;$$

on a donc finalement

$$\rho^2 = \frac{\displaystyle\sum_{ij} p_{ij}^2}{\displaystyle\sum_j \left(\sum_i \frac{p_{ij}}{R_i}\right)^2}. \tag{12}$$

Le numérateur de cette fraction est la somme des carrés des coordonnées du cercle $(p)$; je représenterai par $\Xi(p)$ cette forme quadratique

$$\Xi(p) = \sum_{ij} p_{ij}^2. \tag{13}$$

Cette forme $\Xi(p)$ joue un rôle important dans la théorie des cercles dans l'espace. Lorsqu'elle est nulle, le rayon du cercle $(p)$ est nul. Nous allons montrer que sa forme polaire intervient aussi très utilement; je représen-

terai par $\Xi(p, p')$ cette forme polaire, en sorte que l'on aura

$$(14) \qquad \Xi(p, p') = \frac{1}{2}\sum_{ij} \frac{\partial \Xi(p)}{\partial p_{ij}} p'_{ij} = \sum_{ij} p_{ij} p'_{ij}.$$

*Cercles en involution.*

Considérons deux cercles $(p)$, $(p')$. Si par l'un d'eux on peut mener une sphère orthogonale à l'autre, réciproquement, on peut, par celui-ci, mener une sphère orthogonale au premier, et nous dirons alors que les deux cercles sont *en involution*.

Prouvons d'abord la réciprocité que nous venons d'avancer.

Rappelons que les *foyers* d'un cercle sont les sommets des deux cônes isotropes passant par ce cercle. Si un cercle est orthogonal à une sphère, il a sur elle ses foyers, et, réciproquement, si les foyers d'un cercle sont sur une sphère, celle-ci est orthogonale au cercle. En effet, pour qu'un cercle soit orthogonal à une sphère, il faut et il suffit que deux sphères quelconques, passant par ce cercle, soient orthogonales à la sphère; si l'on prend, en particulier, pour les deux sphères les cônes isotropes qui passent par ce cercle, on voit que la double condition d'orthogonalité consistera précisément en ce que les sommets de ces cônes soient sur la sphère. Ajoutons que, lorsqu'un cercle est tracé sur une sphère, le rapport des distances d'un point quelconque de la sphère aux deux foyers est constant, et, réciproquement, le lieu des points, dont le rapport des distances à deux points fixes est constant, est une sphère qui contient le cercle dont ces deux points sont les foyers.

Ceci posé, si par le cercle $(p')$ on peut mener une sphère S orthogonale au cercle $(p)$, cette sphère S doit passer par les foyers P, Q du cercle $(p)$, et, en appelant P', Q' les foyers du cercle $(p')$, puisque les points P, Q sont sur une même sphère passant par $(p')$, on a

$$(15) \qquad \frac{PQ'}{PP'} = \frac{QQ'}{PP'}.$$

Cette égalité peut s'écrire aussi

$$\frac{PQ'}{QQ'} = \frac{PP'}{QP'},$$

et elle exprime alors que les points P′, Q′ sont sur une même sphère passant par le cercle $(p)$ qui a P, Q pour foyers; il en résulte qu'il existe une sphère passant par le cercle $(p)$, et orthogonale au cercle $(p')$. La réciproque est ainsi établie.

Remarquons ici que les points P, P′, Q, Q′ forment un quadrilatère dont le produit de deux côtés opposés est égal au produit des deux autres.

Cherchons maintenant à exprimer que deux cercles $(p)$, $(p')$ sont en involution.

Si, par le cercle $(p')$, on peut mener une sphère S orthogonale au cercle $(p)$, toutes les sphères passant par $(p)$ sont orthogonales à S, et, réciproquement, si deux sphères passant par $(p)$ sont orthogonales à une sphère S passant par $(p')$, toutes les sphères passant par $(p)$ seront orthogonales à S, et les cercles $(p)$, $(p')$ seront en involution.

Prenons donc la sphère

$$\sum_i (\lambda p'_{\alpha i} + \mu p'_{\beta i}) x_i = 0,$$

menée par le cercle $(p')$ et qui, par hypothèse, est orthogonale à toutes les sphères menées par le cercle $(p)$, on aura, en exprimant l'orthogonalité avec les sphères

$$\sum p_{\rho i} x_i = 0, \qquad \sum_i p_{\sigma i} x_i = 0,$$

les conditions [1]

$$\lambda \sum_i p'_{\alpha i} p_{\rho i} + \mu \sum_i p'_{\beta i} p_{\rho i} = 0,$$

$$\lambda \sum_i p'_{\alpha i} p_{\sigma i} + \mu \sum_i p'_{\beta i} p_{\sigma i} = 0;$$

d'où, en éliminant $\lambda$, $\mu$,

$$\sum_i p'_{\alpha i} p_{\rho i} \sum_i p'_{\beta i} p_{\sigma i} - \sum_i p'_{\beta i} p_{\rho i} \sum_i p'_{\alpha i} p_{\sigma i} = 0.$$

---

[1] On sait, en effet, que l'orthogonalité des sphères

$$\sum a_i x_i = 0, \qquad \sum b_i x_i = 0$$

s'exprime par l'équation

$$\sum a_i b_i = 0.$$

Cette équation peut prendre une forme beaucoup plus symétrique, d'où sont éliminés les indices $\alpha$, $\beta$, $\rho$, $\sigma$; elle peut s'écrire, en effet,

$$\sum_{ij} (p'_{\alpha i} p'_{\beta j} - p'_{\alpha j} p'_{\beta i})(p_{\rho i} p_{\sigma j} - p_{\sigma i} p_{\rho j}) = 0,$$

c'est-à-dire,

$$p_{\alpha\beta} p_{\rho\sigma} \sum_{ij} p_{ij} p'_{ij} = 0,$$

en vertu des équations (6).

On voit donc que *l'équation*

$$(16) \qquad \Xi(p, p') = 0$$

*exprime l'involution* [1] *des deux cercles* $(p)$ *et* $(p')$.

La symétrie de cette équation met de nouveau en évidence la réciprocité que nous avons directement démontrée [2].

---

(1) Il y a encore une autre espèce d'involution de deux cercles que l'on pourrait appeler *bi-involution;* elle a lieu quand un cercle $(p)$ passe par les foyers d'un autre $(p')$; la relation est réciproque, et toute sphère menée par l'un des cercles est orthogonale à toute sphère menée par l'autre, et, par suite, est orthogonale à ce cercle lui-même. Dans ce cas, l'équation d'orthogonalité

$$p_{\alpha 1} p'_{\beta 1} + p_{\alpha 2} p'_{\beta 2} + \ldots + p_{\alpha 5} p'_{\beta 5} = 0$$

a lieu pour toutes les valeurs des indices $\alpha$ et $\beta$. Quatre seulement de ces conditions sont distinctes.

(2) Il existe un élément intéressant, que l'on pourrait appeler l'angle de deux cercles dans l'espace. Soient un cercle $c$ et un cercle $c'$; soient $\Phi$, $\Phi_0$; $\Phi'$, $\Phi'_0$ leurs foyers respectifs. Les sphères passant par $c'$ tracent sur la droite $\Phi\Phi_0$ une involution; soient $\Delta$, $\Delta_0$ les points doubles de cette involution; et considérons le rapport anharmonique

$$\rho = (\Delta\Delta_0\Phi\Phi_0).$$

Ce que nous proposons d'appeler l'angle des cercles $c$ et $c'$, c'est la quantité

$$V = \frac{1}{2i} \log \rho;$$

on a la formule

$$\cos V = \frac{\sum p_{ik} p'_{ik}}{\sqrt{\sum p_{ik}^2}\sqrt{\sum p'^2_{ik}}} = \frac{\Xi(p, p')}{\sqrt{\Xi(p)\Xi(p')}}.$$

On voit que dans l'expression de $\cos V$ les cercles $c$ et $c'$ figurent symétriquement; quand $V$ est droit, les cercles sont en involution.

*Des systèmes de cercles et, en particulier, des systèmes linéaires.*

Une équation homogène, entre les coordonnées d'un cercle, représente une série cinq fois indéterminée de cercles : deux représentent une série quatre fois indéterminée, trois représentent un *complexe* de cercles ou cercles trois fois indéterminés, quatre équations représentent une *congruence* de cercle (double indétermination), cinq représentent une surface cerclée, et enfin six déterminent complètement un ou plusieurs cercles.

Si toutes les équations sont linéaires, on a des systèmes linéaires de cercles, que nous représenterons par les symboles $A_5$, $A_4$, $A_3$, $A_2$, $A_1$, $A_0$, l'indice indiquant l'indétermination du système.

Le système $A_0$, ainsi que le système $A_2$, a été l'objet de fort intéressantes recherches de M. Stéphanos aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, recherches que nous avons déjà citées. Disons, d'ailleurs ici, une fois pour toutes, que nous ne connaissons nul autre travail sur cette question pleine d'intérêt des cercles dans l'espace [1].

D'après ce que nous avons dit au début sur l'espace $E_4^5$, commun aux hyperquadriques $\Omega_i$, on voit que les six équations linéaires qui définissent $A_0$ auront en commun avec les équations

$$\Omega_1 = 0, \qquad \Omega_2 = 0, \qquad \Omega_3 = 0, \qquad \Omega_4 = 0, \qquad \Omega_5 = 0$$

un nombre de solutions égal au degré de l'espace commun à ces hyperquadriques, c'est-à-dire égal à cinq.

Le système $A_0$ est donc un ensemble de cinq cercles, c'est le *pentacycle* de M. Stéphanos.

Montrons comment la notion de *pentacycle* est liée à celle de *congruence linéaire* par le moyen de celle d'*involution de deux cercles*.

Si l'on considère les quatre équations linéaires entre les $p_{ik}$ qui définissent une congruence, savoir

$$(17) \qquad \begin{cases} \sum a_{ik} p_{ik} = 0, \\ \sum b_{ik} p_{ik} = 0, \\ \sum c_{ik} p_{ik} = 0, \\ \sum f_{ik} p_{ik} = 0, \end{cases}$$

---

[1] J'ai communiqué les principaux faits, réunis dans ce résumé, à la Société mathématique de France en avril 1887.

on peut remplacer l'une quelconque de ces équations par la combinaison linéaire

$$\sum (\lambda a_{ik} + \mu b_{ik} + \nu c_{ik} + \rho f_{ik}) p_{ik} = 0.$$

Or posons

$$\lambda a_{ik} + \mu b_{ik} + \nu c_{ik} + \rho f_{ik} = \sigma p'_{ik},$$

ce qui assujettit simplement les quantités $p'_{ik}$ à six équations linéaires; si l'on veut, en outre, que les $p'_{ik}$ soient les coordonnées d'un cercle, le problème sera déterminé, et l'on aura cinq solutions ou cinq cercles $(p^{(1)})$, $(p^{(2)})$, $(p^{(3)})$, $(p^{(4)})$, $(p^{(5)})$ formant un *pentacycle*. Aux équations linéaires primitives on peut donc substituer quatre quelconques des cinq équations

$$\Xi(p^{(\omega)}, p) = \sum_{ik} p_{ik}^{(\omega)} p_{ik} = 0,$$

qui exprime que les cercles de la congruence sont en involution avec le cercle $(p^{(\omega)})$.

*Les cercles d'une congruence linéaire sont donc en involution avec cinq cercles formant un pentacycle.*

Notons encore que, si l'on considère quatre cercles, les cercles en involution avec eux forment une congruence linéaire et sont en involution avec un cinquième. Ce cinquième cercle forme avec les quatre premiers un pentacycle, en sorte qu'un pentacycle est déterminé par quatre de ses cercles.

Je n'insiste pas ici sur ces résultats, présentés, sous une forme un peu différente, par M. Stéphanos et fort élégamment développés par lui. Je présenterai seulement quelques remarques sur les systèmes $A_3$, qui me paraissent devoir être l'origine de voies nouvelles.

Considérons l'équation

$$\sum_{ik} a_{ik} p_{ik} = 0, \tag{18}$$

qui représente un système $A_3$; je vais chercher la distribution des cercles de ce système sur la sphère S

$$\sum_i l_i x_i = 0;$$

soit donc une autre sphère $\Sigma$,

$$\sum_i \lambda_i x_i = 0$$

qui coupe la première suivant le cercle $(p)$

$$p_{ik} = l_i\lambda_k - l_k\lambda_i;$$

ce cercle faisant partie du système $A_5$, nous devons avoir

$$\sum_{ik} a_{ik}(l_i\lambda_k - l_k\lambda_i) = 0$$

ou encore, en convenant que $a_{ik} = -a_{ki}$, $a_{ii} = 0$,

(19) $$\sum_i \lambda_i \sum_k a_{ik} l_k = 0.$$

Considérons alors la sphère S′,

$$\sum_i l'_i x_i = 0,$$

où l'on prend

(20) $$l'_i = \sum_k a_{ik} l_k,$$

l'équation

$$\sum_i \left(\lambda_i \sum_k a_{ik} l_k\right) = \sum_i l'_i \lambda_i$$

exprime que les sphères S′ et Σ sont orthogonales. On a, d'ailleurs, évidemment

(21) $$\sum l'_i l_i = 0,$$

en sorte que S′ est aussi orthogonale à S; le cercle $(p)$, intersection de S et de Σ, est donc orthogonal à S′. D'où ce théorème :

*Tous les cercles d'un système $A_5$ qui sont tracés sur une sphère* S *quelconque sont orthogonaux à une seconde sphère* S′, que nous appellerons la *conjuguée de* S.

Nous avons déjà remarqué qu'une sphère et sa conjuguée sont orthogonales d'après l'équation (21). Mais la correspondance entre S et S′ n'est pas réciproque; en effet, *toutes les sphères conjuguées des sphères de l'espace sont orthogonales à une sphère fixe* K, que nous appellerons la *sphère centrale*.

Pour établir cette proposition, remarquons, en effet, que les cinq équations

$$(32)\qquad \sum_k a_{ik} l_k = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

sont compatibles, car leur déterminant est symétrique gauche d'ordre impair. Soient $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$ les solutions de ces équations compatibles. On voit d'après (19) que tous les cercles tracés sur la sphère (K), $\sum K_i x_i = 0$, font partie du système $A_4$. Le cercle (K, S), intersection des sphères (K) et (S), fait donc partie du système $A_5$; il est ainsi orthogonal à la sphère (S′), et, par conséquent, la sphère (K) qui le contient est orthogonale à (S′).

C. Q. F. D.

*Toutes les sphères qui coupent la sphère centrale suivant un même cercle ont même conjuguée.*

En effet, les équations (20) donnent la même valeur pour les $l'_i$ si l'on y remplace les $l_k$ par $l_k + \rho K_k$, c'est-à-dire si l'on y remplace la sphère S par une sphère quelconque passant par le cercle X, intersection des sphères K et S. On peut donc énoncer le théorème suivant :

*Tous les cercles du système $A_5$ qui coupent deux fois un cercle quelconque X de la sphère centrale sont orthogonaux à une même sphère S′.*

Appelons X′ le cercle (S′, K); la correspondance entre les sphères S, S′ se réduit, on le voit, à la correspondance entre les cercles X, X′, traces de ces sphères sur la sphère centrale.

D'abord les cercles X, X′ sont orthogonaux entre eux, comme on le voit sans peine, puisque X est orthogonal à la sphère S′, qui est orthogonale à la sphère K.

Mais cela ne suffit pas pour pouvoir construire le cercle X′ lorsque le cercle X est donné, il est nécessaire de recourir à l'étude des formules (20). Nous serons ainsi conduits tout d'abord à définir les *invariants* d'un système $A_5$, dans lesquels on verra encore intervenir les formes quadratiques déjà considérées.

Cherchons les sphères qui coïncident avec leurs conjuguées.

On peut prévoir que, s'il existe de telles sphères, leur rayon est nul; car, si une sphère est orthogonale à elle-même, son rayon est nul, et c'est ici le cas, puisqu'une sphère et sa conjuguée sont orthogonales; en second lieu,

les centres de ces sphères de rayon nul doivent être sur la sphère centrale, puisqu'elles leur sont orthogonales.

Mais les formules (20) nous donneront des résultats plus complets. Exprimons, conformément à l'hypothèse, que l'on a

$$\frac{f_1}{l_1} = \frac{f_2}{l_2} = \frac{f_3}{l_3} = \frac{f_4}{l_4} = \frac{f_5}{l_5} = -s,$$

où $s$ est un paramètre à déterminer. Les formules (20) nous donneront

$$\begin{aligned}
s\ l_1 + a_{12} l_2 + a_{13} l_3 + a_{14} l_4 + a_{15} l_5 &= 0,\\
a_{21} l_1 + \ s\ l_2 + a_{23} l_3 + a_{24} l_4 + a_{25} l_5 &= 0,\\
a_{31} l_1 + a_{32} l_2 + \ s\ l_3 + a_{34} l_4 + a_{35} l_5 &= 0,\\
a_{41} l_1 + a_{42} l_2 + a_{43} l_3 + \ s\ l_4 + a_{45} l_5 &= 0,\\
a_{51} l_1 + a_{52} l_2 + a_{53} l_3 + a_{54} l_4 + \ s\ l_5 &= 0;
\end{aligned}$$

on tire de là l'équation en $s$

$$f(s) = \begin{vmatrix} s & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & s & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & s \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation change simplement de signe si l'on y change le signe de $s$; on a, en effet,

$$f(-s) = \begin{vmatrix} -s & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & -s & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & -s \end{vmatrix}$$

ou, comme $a_{ik} = -a_{ki}$, on peut écrire

$$f(-s) = (-1)^5 \begin{vmatrix} s & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} \\ a_{12} & s & a_{32} & a_{42} & a_{52} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & s \end{vmatrix};$$

le déterminant est $f(s)$ où les lignes sont devenues les colonnes : on a donc

$$f(-s) = (-1)^5 f(s) = -f(s).$$

L'équation du cinquième degré $f(s) = 0$ ne contient donc que des termes

impairs et peut s'écrire

$$f(s) = s(s^4 + \mathrm{I}s^2 + \mathrm{J}) = 0.$$

La solution $s = 0$ fournit la sphère centrale elle-même; mais nous voyons qu'il y aura encore quatre autres sphères, celles-ci de rayon nul, qui vérifieront l'énoncé, et qui seront données par l'équation

$$s^4 + \mathrm{I}s^2 + \mathrm{J} = 0.$$

Les quantités I et J ont pour expression

$$\mathrm{I} = \sum_{ij} a_{ij}^2,$$
$$\mathrm{J} = \sum_i (a_{mn}a_{pq} + a_{mp}a_{qn} + a_{mq}a_{np})^2;$$

dans cette dernière formule, les indices $i$, $m$, $n$, $p$, $q$ sont les cinq premiers indices, pris dans l'ordre de permutation 1, 2, 3, 4, 5 à partir de l'un d'eux $i$.

Représentons par $\xi(a)$ la forme adjointe de la forme $\Xi(p)$, et par $\omega_1(a)$, $\omega_2(a)$, $\omega_3(a)$, $\omega_4(a)$, $\omega_5(a)$ les formes adjointes de $\Omega_1(p)$, $\Omega_2(p)$, …, $\Omega_5(p)$; on voit que l'on a

$$\mathrm{I} = \xi(a),$$
$$\mathrm{J} = \sum_i [\omega_i(a)]^2.$$

Ces quantités I et J sont les *invariants* du système $A_5$.

On conçoit que ces invariants ont une importance capitale, car on en pourra déduire aussi les invariants des systèmes linéaires inférieurs $A_4$, $A_3$, $A_2$, $A_1$, $A_0$, qui seront des *combinants* déduits de ces invariants.

Reprenons maintenant l'équation

$$s^4 + \mathrm{I}s^2 + \mathrm{J} = 0,$$

et désignons par $\sigma$, $-\sigma$, $\sigma'$, $-\sigma'$ les racines de cette équation. A chacune répond une sphère, ce qui donne les quatre sphères $\Sigma$, $\Sigma_0$, $\Sigma'$, $\Sigma'_0$ dont nous désignerons les centres par $c$, $c_0$, $c'$, $c'_0$.

Prenons deux de ces sphères, correspondant à deux racines quelconques $s$, $s'$ de l'équation en $s$, nous aurons, en désignant par $g_i$ et $g'_i$ les coordon-

nées de ces sphères,

$$-s g_i = \sum_k a_{ik} g_k,$$

$$-s' g'_k = \sum_i a_{ki} g'_i.$$

On tire de la première de ces équations

$$-s \sum_i g_i g'_i = \sum_i g'_i \sum_k a_{ik} g_k = \sum_{ki} a_{ik} g_k g'_i,$$

et de la seconde

$$-s' \sum_k g_k g'_k = \sum_k g_k \sum_i a_{ki} g'_i = \sum_{ik} a_{ki} g_k g'_i;$$

mais, comme

$$\sum_i g_i g'_i = \sum_k g_k g'_k,$$

on peut écrire, en ajoutant,

$$(s + s') \sum_i g_i g'_i = \sum_{ik} (a_{ik} + a_{ki}) g_k g'_i = 0,$$

car $a_{ik} = - a_{ki}$.

Supposons que $s$ et $s'$ soient égaux et de signe contraire, alors cette équation a lieu d'elle-même; mais, dans le cas contraire, on a

$$\sum_i g_i g'_i = 0.$$

De là ce théorème : *La sphère $\Sigma$ et la sphère $\Sigma_0$ sont toutes deux orthogonales aux sphères $\Sigma'$ et $\Sigma'_0$.*

Mais, comme les rayons des sphères $\Sigma$ et $\Sigma'$ sont nuls, il faut, pour qu'elles soient orthogonales, que leurs centres soient sur une même ligne isotrope.

On voit ainsi que les droites $cc'$, $cc'_0$, $c_0c'$, $c_0c'_0$ sont quatre droites isotropes, et comme les points $c$, $c_0$, $c'$, $c'_0$ sont sur la sphère centrale, on en conclut que les côtés du quadrilatère $cc'c_0c'_0c$ sont quatre génératrices rectilignes de la sphère centrale; autrement dit, les droites $cc_0$, $c'c'_0$ sont deux droites conjuguées par rapport à la sphère centrale.

Utilisons ces résultats dans l'étude de la correspondance entre les cercles X et X' déjà définis.

Prenons pour sphères de référence $S_1$ et $S_2$ deux sphères orthogonales passant en $c$ et $c_0$ et orthogonales à la sphère K; pour sphères $S_3$ et $S_4$, deux sphères orthogonales entre elles et à K, et passant par $c'$ et $c'_0$; enfin, prenons pour $S_5$ la sphère K.

Ce système de cinq sphères sera quintuplement orthogonal, et la correspondance entre les sphères $S(l_1, l_2, \ldots, l_5)$ et $S'(l'_1, l'_2, \ldots, l'_5)$ est, eu égard au choix des coordonnées, établie par les formules

$$(23) \qquad \begin{cases} \rho l'_1 = l_2, \\ \rho l'_2 = -l_1, \\ \rho l'_3 = a l_4, \\ \rho l'_4 = -a l_3, \\ l'_5 = 0, \end{cases}$$

où $\rho$ est un paramètre de proportionnalité, et $a$ une constante. On peut regarder $l_1, l_2, l_3, l_4$ comme les coordonnées tétracirculaires *sur la sphère* K du cercle X, et $l'_1, l'_2, l'_3, l'_4$ comme les coordonnées du cercle X'. Les quatre premières formules ci-dessus établissent donc la correspondance entre ces cercles.

D'après ces formules, l'équation du cercle X étant

$$l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + l_4 x_4 = 0,$$

celle du cercle X' sera,

$$(24) \qquad l_2 x_1 - l_1 x_2 + a(l_4 x_3 - l_3 x_4) = 0.$$

Le cercle Γ mené par les points $c$ et $c_0$ orthogonalement au cercle X a pour équation

$$l_2 x_1 - l_1 x_2 = 0;$$

le cercle Γ' mené, de même, par les points $c'$ et $c'_0$, orthogonalement au cercle X, a pour équation

$$l_4 x_3 - l_3 x_4 = 0;$$

l'équation (24) prouve tout d'abord que le cercle X' passe par l'intersection des cercles Γ et Γ'.

Notons ici que, puisque Γ et Γ' sont, par construction, orthogonaux au cercle X, le cercle X' se trouve naturellement être orthogonal à X. Il faut donc trouver une troisième propriété du cercle X', qui permette d'achever sa

construction. Dans cette propriété doit forcément intervenir l'invariant absolu $a$, qui, d'après nos notations, est lié aux invariants I et J par l'équation

$$\left(\frac{1+a^2}{a}\right)^2 = \frac{I^2}{J}.$$

Rappelons que le cosinus de l'angle (au sens ordinaire) de deux cercles $(l)$, $(m)$ tracés sur K est donné par la formule

$$\cos(\widehat{l, m}) = \frac{l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 + l_4 m_4}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2}\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2}};$$

cela étant, j'appelle V' l'angle du cercle X' avec le cercle Γ, qui a pour cosinus

$$\cos V' = \frac{l_1^2 + l_2^2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}\sqrt{(l_1^2 + l_2^2) + a^2(l_3^2 + l_4^2)}} = \sqrt{\frac{l_1^2 + l_2^2}{l_1^2 + l_2^2 + a^2(l_3^2 + l_4^2)}}.$$

L'angle de X' avec Γ' est égal à $\frac{\pi}{2} - V'$, puisque Γ et Γ' sont orthogonaux (attendu que leurs plans passent par les droites $cc_0$ et $c'c'_0$ qui sont conjuguées); on a ainsi

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - V'\right) = \sin V' = a\sqrt{\frac{l_3^2 + l_4^2}{l_1^2 + l_2^2 + a^2(l_3^2 + l_4^2)}},$$

ce que l'on peut encore écrire

(15) $$\tang V' = a\sqrt{\frac{l_3^2 + l_4^2}{l_1^2 + l_2^2}}.$$

Or considérons le cercle $\Gamma_0$ qui coupe orthogonalement le cercle Γ en $c$ et $c_0$ : il a pour équation

$$l_1 x_1 + l_2 x_2 = 0;$$

de même, le cercle $\Gamma'_0$ qui coupe orthogonalement le cercle $\Gamma_0$ en $c'$ et $c'_0$, a pour équation

$$l_3 x_3 + l_4 x_4 = 0;$$

ces deux cercles se coupent orthogonalement, et le cercle X passe par leur intersection. Soit V l'angle que X fait avec $\Gamma_0$, l'angle avec $\Gamma'_0$ sera $\frac{\pi}{2} - V$, et l'on aura

$$\cos V = \sqrt{\frac{l_1^2 + l_2^2}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2}},$$

$$\sin V = \sqrt{\frac{l_3^2 + l_4^2}{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2}},$$

d'où

$$\operatorname{tang} V = \sqrt{\frac{l_3^2 + l_4^2}{l_1^2 + l_2^2}};$$

la formule (25) devient donc

$$(26) \qquad \operatorname{tang} V' = a \operatorname{tang} V.$$

En résumé, le cercle X étant donné, on mènera par $c$ et $c_0$ un cercle $\Gamma$ orthogonal à X, et par $c'$ et $c'_0$ un cercle $\Gamma'$ orthogonal aussi à X : on construira ensuite les cercles $\Gamma_0$ et $\Gamma'_0$ qui coupent respectivement à angle droit le cercle $\Gamma$ en $c$ et $c_0$, et le cercle $\Gamma'$ en $c'$ et $c'_0$; ces cercles $\Gamma_0$, $\Gamma'_0$ sont orthogonaux et se coupent en deux points situés sur le cercle X; soient V, $\frac{\pi}{2} - V$ les angles sous lesquels le cercle X coupe ces cercles. Pour construire le cercle X', on mènera, par les points communs aux cercles $\Gamma$ et $\Gamma'$, un cercle qui coupera le premier sous l'angle V', et le second sous l'angle $\frac{\pi}{2} - V'$, où V' est donné par la formule

$$\operatorname{tang} V' = a \operatorname{tang} V.$$

Je n'insisterai pas davantage ici sur ces questions pleines d'intérêt, mais qui demanderaient, on le voit, à être traitées avec détail.

Je voulais surtout signaler ces formes quadratiques $\Omega$ et $\Xi$, qui interviennent si naturellement dans cette théorie.



SUR LA

# TRANSFORMATION DE L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE

## DE SECONDE ESPÈCE;

PAR M. HERMITE.

Extrait d'une Lettre adressée à M. MATYAS LERCH, dans les *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Bohême*, 7e série, t. II; 1888.

En modifiant un peu le procédé ordinaire de réduction des intégrales hyperelliptiques, j'ai considéré, dans mes Leçons ([1]), les expressions de la forme suivante

$$\int \frac{G\,dx}{A^{a+1}\sqrt{R}},$$

où G, A et R sont des polynômes entiers en $x$, A et R n'ayant que des facteurs simples et étant supposés premiers entre eux. J'ai montré qu'elles se ramènent facilement à un terme algébrique et à une expression semblable où l'exposant $a$ est diminué d'une unité. Dans le cas, par exemple, de $a = 1$ que je vais employer, on détermine deux polynômes P et Q par la condition

$$G = AP - A'RQ,$$

et, en posant

$$Q_1 = P - RQ' - \tfrac{1}{2}R'Q,$$

on a cette égalité, qui se vérifie immédiatement par la différentiation,

$$\int \frac{G\,dx}{A^2\sqrt{R}} = \frac{Q\sqrt{R}}{A} + \int \frac{Q_1\,dx}{A\sqrt{R}}.$$

Je vais l'appliquer à la recherche de l'expression de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{\lambda^2 y^2\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}},$$

([1]) *Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Paris*, 3e édit., p. 28.

où $y = \frac{U}{V}$ est la formule de transformation de Jacobi qui satisfait à l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{M}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Je remarque d'abord que l'on peut écrire

$$\int \frac{\lambda^2 y^2\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{M}\int \frac{\lambda^2 U^2\,dx}{V^2\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

de sorte qu'en prenant

$$R = (1-x^2)(1-k^2x^2), \qquad G = \lambda^2 U^2, \qquad A = V,$$

la relation précédente nous donne

$$\int \frac{\lambda^2 U^2\,dx}{V^2\sqrt{R}} = \frac{Q\sqrt{R}}{V} + \int \frac{Q_1\,dx}{V\sqrt{R}}.$$

Cela étant, je dis que $Q_1$ est divisible par V, c'est-à-dire que le second membre ne contient pas d'intégrales de troisième espèce qui admettent des infinis logarithmiques. M. Fuch obtient *a priori*, et sans calcul, ce résultat important que j'établirai ensuite algébriquement de la manière suivante. L'illustre géomètre m'a fait observer que, l'intégrale

$$\int \frac{\lambda^2 y^2\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}}$$

n'ayant point d'infini logarithmique, il en est de même nécessairement de la transformée en $x$ obtenue en faisant $y = \frac{U}{V}$, puisque la nouvelle variable est une fonction algébrique de $y$. Il ne nous reste plus, par conséquent, qu'à obtenir le polynôme Q et le quotient entier $\frac{Q_1}{V}$. Pour cela, j'emploie l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{M}\frac{dx}{\sqrt{R}};$$

après avoir substitué la valeur $y = \frac{U}{V}$, j'élève au carré, ce qui donne l'égalité

$$M^2 R(U'V - UV')^2 = V^4 - (1+\lambda^2)U^2V^2 + \lambda^2 U^4,$$

ou, sous une autre forme,

$$U^2(M^2RV'^2 - \lambda^2 U^2) = V^4 - (1+\lambda^2)U^2V^2 - M^2R(U'^2V^2 - 2UU'VV').$$

On montre ainsi que $M^2RV'^2 - \lambda^2 U^2$ est divisible par V qui, étant premier avec U, et par conséquent avec $U^2$, entre dans le second membre comme facteur. Soit donc, en désignant par H un polynôme entier,

$$M^2RV'^2 - \lambda^2U^2 = VH,$$

nous aurons

$$\lambda^2U^2 = -VH + M^2RV'^2;$$

or la relation par laquelle se déterminent les quantités désignées plus haut par P et Q, étant maintenant

$$\lambda^2U^2 = VP - V'RQ,$$

on voit immédiatement qu'on peut prendre $P = -H$ et $Q = -M^2V'$.

Soit ensuite S le quotient entier $\frac{Q_1}{V}$ que nous avons encore à obtenir, et qui donne l'égalité

$$\int \frac{\lambda^2U^2\,dx}{V^2\sqrt{R}} = -\frac{M^2V'\sqrt{R}}{V} + \int \frac{S\,dx}{\sqrt{R}}.$$

On trouve, par la différentiation, l'expression suivante

$$S = \frac{\lambda^2U^2}{V^2} + M^2\sqrt{R}D_x\left(\frac{V'\sqrt{R}}{V}\right),$$

et il en résulte facilement que S est un simple binôme $gx^2 + h$.

Je cherche, en effet, la limite de $\frac{S}{x^2}$ pour $x$ infiniment grand; en faisant, avec Jacobi,

$$U = \frac{x}{M}[1 + A'x^2 + A''x^4 + \ldots + A^{(m)}x^{2m}],$$

$$V = 1 + B'x^2 + B''x^4 + \ldots + B^{(m)}x^{2m},$$

de sorte que l'ordre de la transformation soit $n = 2m+1$, on obtient la

quantité finie

$$\left[\frac{\lambda A^{(m)}}{MB^{(m)}}\right]^2 + 2mk^2M^2,$$

qui représente, par conséquent, la constante $g$.

Cette valeur se simplifie au moyen des relations établies à la fin du § XII des *Fundamenta*. Si l'on emploie les suivantes

$$\frac{A^{(m)}}{M} = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}\,k^m, \qquad \frac{1}{M} = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}\,\frac{B^{(m)}}{k^m},$$

on en tire aisément

$$\frac{\lambda A^{(m)}}{MB^{(m)}} = kM,$$

ce qui donne

$$g = k^2M^2 + 2mk^2M^2 \qquad \text{ou bien} \qquad g = nk^2M^2.$$

En supposant ensuite $x = 0$, dans l'expression de S, il vient $h = 2B'M^2$, et nous avons, en conséquence, le résultat important contenu dans la relation

$$\int_0^x \frac{\lambda^2U^2\,dx}{V^2\sqrt{R}} = -\frac{M^2V'\sqrt{R}}{V} + M^2\int_0^x \frac{(nk^2x^2+2B')\,dx}{\sqrt{R}},$$

ou encore, si l'on revient à la variable $y$, après avoir divisé les deux membres par $M^2$,

$$\frac{1}{M}\int_0^y \frac{\lambda^2y^2\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = -\frac{V'\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{V} + \int_0^x \frac{(nk^2x^2+2B')\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

C'est la relation qu'a donnée Jacobi, en remplaçant l'intégrale de seconde espèce de Legendre par celle de M. Weierstrass.

Je reviens maintenant au polynôme $Q_1$, afin d'établir, par une voie purement algébrique, qu'il est divisible par V. A cet effet, je reprends la formule générale de réduction, dans laquelle R est un polynôme de degré quelconque,

$$\int \frac{G\,dx}{A^2\sqrt{R}} = \frac{Q\sqrt{R}}{A} + \int \frac{Q_1\,dx}{A\sqrt{R}},$$

en me proposant d'exprimer, au moyen de G, A et R, la condition pour

que $Q_1$ soit divisible par A. Ainsi qu'on l'a vu plus haut, on a

$$Q_1 = P - RQ' - \tfrac{1}{2}R'Q,$$

et, par conséquent, si l'on fait $Q_1 = AS$, il vient

$$P = AS + RQ' + \tfrac{1}{2}R'Q.$$

Cela étant, en différentiant l'équation

$$G = AP - A'RQ,$$

nous obtenons

$$G' = AP' + A'(P - RQ' - R'Q) - A''RQ,$$

puis, au moyen de la valeur de P,

$$G' = A(P' + A'S) - Q(RA'' + \tfrac{1}{2}R'A').$$

Prenons maintenant, suivant le module A, les valeurs de G et G'; on aura

$$G \equiv - A'RQ,$$
$$G' \equiv - Q(RA'' + \tfrac{1}{2}R'A'),$$

et l'on en conclut immédiatement que le polynôme

$$RA'G' - G(RA'' + \tfrac{1}{2}R'A')$$

est divisible par A; c'est le résultat auquel il s'agissait de parvenir et que je vais appliquer en supposant $R = (1 - x^2)(1 - k^2x^2)$, $G = U^2$ et $A = V$.

Nous obtenons alors l'expression suivante

$$U[2RU'V' - U(RV'' + \tfrac{1}{2}R'V')],$$

ou bien, en multipliant par 2,

$$U[4RU'V' - U(2RV'' + R'V')],$$

et il s'agit de prouver qu'elle est divisible par V. C'est ce qu'on établit au moyen de l'équation

$$M^2R(U'V - UV')^2 = V^4 - (1 + \lambda^2)U^2V^2 + \lambda^2U^4$$

et de sa dérivée, dans lesquelles je ferai, pour un moment, $U'V - UV' = W$.

On a ainsi

$$M^2RW^2 = V^4 - (1+\lambda^2)U^2V^2 - \lambda^2U^4,$$
$$M^2W(2RW' + R'W) = 4V^3V' - 2(1+\lambda^2)UV(UV' + U'V) - 4\lambda^2U^3U'.$$

Multiplions la première par $4U'$, la seconde par $U$, et retranchons membre à membre, après avoir supprimé le facteur $W$, nous aurons

$$M^2[4RU'W - U(2RW' + R'W)] = 4V^3 - 2(1+\lambda^2)U^2V.$$

Cela étant, on obtient facilement, au moyen de la valeur de $W$,

$$4RU'W - U(2RW' + R'W)$$
$$= V[4RU'^2 - U(2RU'' + R'U')] - U[4RU'V' - U(2RV'' + R'V')];$$

le premier membre de l'équation contenant en facteur $V$, il est donc démontré que la quantité considérée

$$U[4RU'V' - U(2RV'' + R'V')]$$

est elle-même divisible par $V$, comme je l'ai annoncé. Je remarquerai en outre qu'on peut joindre les égalités suivantes à celles qui viennent d'être employées :

$$M^2[4RV'W - V(2RW' + R'W)] = 2(1+\lambda^2)UV^2 - 4\lambda^2U^3,$$

$$4RV'W - V(2RW' + R'W)$$
$$= V[4RU'V' - V(2RU'' + R'U')] - U[4RV'^2 - V(2RV'' + R'V')];$$

elles montrent que l'expression

$$V[4RU'V' - V(2RU'' + R'U')]$$

est divisible par $U$, et comme $U$ et $V$ sont premiers entre eux, on en conclut ces relations, qu'il ne m'a pas paru inutile d'indiquer :

$$4RU'V' - U(2RV'' + R'V') \equiv 0 \pmod{V},$$
$$4RU'V' - V(2RU'' + R'U') \equiv 0 \pmod{U}.$$

# DÉPLACEMENT

DU

# CUIVRE PAR LE ZINC ET LE CADMIUM

## DANS QUELQUES SOLUTIONS DE SELS DE CUIVRE,

PAR M. A. DESTREM,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Toulouse.

### I. — Déplacement du cuivre par le zinc.

Lorsque, dans une dissolution d'un sel de cuivre, on trempe une lame de zinc pur, bien décapée, on sait que le cuivre est déplacé de sa dissolution saline et qu'il y est remplacé par le zinc.

De plus, cet échange se fait suivant des poids proportionnels aux équivalents des deux métaux.

Le cuivre mis en liberté se porte sur la lame de zinc et y forme un dépôt métallique qui varie d'aspect suivant la qualité du sel de cuivre dissous.

Avec le sulfate de cuivre, l'azotate de cuivre, le chlorure cuivrique, et, en général, avec tous les sels à acides forts, le dépôt est peu adhérent et se présente sous forme d'une masse noirâtre ou marron pulvérulente, peu adhérente à la lame de zinc.

Dans les dissolutions alcalines, telles que la liqueur cupropotassique ou cuproammoniacale, le dépôt est rouge-cuivre et parfaitement adhérent.

Toutes les conditions, pour obtenir l'adhérence et la beauté du dépôt, ont été étudiées avec soin par les spécialistes qui se sont occupés du cuivrage de fer ou de zinc par les procédés galvanoplastiques (dits *cuivrages directs*).

Tels sont le procédé de Weil qui emploie un bain alcalin composé de sulfate de cuivre, tartrate de soude ou de potasse et soude caustique;

Le procédé de Gaudin, qui consiste à opérer le déplacement du cuivre par le fer dans les sels doubles; d'oxyde de cuivre et d'oxydes alcalins des acides organiques polybasiques (tartrique, oxalique, citrique, etc.) avec un excès d'acides, quand ils n'attaquent pas trop fortement le fer.

Enfin, je citerai le procédé de Watt, spécial pour cuivrer le zinc, qui consiste à préparer un bain composé de sulfate de cuivre, d'ammoniaque et de cyanure de potassium.

Dans tous les cas, on remarquera que les dépôts sont obtenus adhérents dans des milieux basiques ou faiblement acidifiés par des acides faibles.

Dans cette première série d'expériences, j'ai recherché les conditions du déplacement du cuivre par le zinc et j'ai étudié les dépôts adhérents qui se forment dans les dissolutions des sels neutres de cuivre à acides faibles, et dans les dissolutions des sels de cuivre très faiblement alcalisés.

1° *Sels neutres de cuivre à acides faibles.* — Pour préparer ces liqueurs neutres, il faut prendre certaines précautions sur lesquelles j'insisterai; car la réussite des expériences dépend de la neutralisation complète de ces dissolutions.

Des solutions de sels de cuivre à acides faibles, étendues à 10 pour 100 environ, sont électrolysées, pendant plusieurs heures, par un courant faible (1 ou 2 daniells), en prenant comme électrode positive soluble une large lame de cuivre et comme électrode négative une lame de platine.

Par ce procédé, le sel de cuivre partiellement dissocié par l'eau se trouve, grâce à l'électrode soluble cuivre, avoir constamment son acide libre neutralisé.

Si, dans un pareil milieu soumis à l'électrolyse, on opère le déplacement du cuivre par le zinc, on remarque :

Que le dépôt est très adhérent et d'un beau brillant;

Que la couleur, au lieu d'être rouge comme celle du cuivre ordinaire ou du cuivre déposé par les procédés galvanoplastiques, a une teinte franchement jaune analogue à celle du laiton ordinaire.

2° *Dissolutions cuivriques faiblement alcalines.* — On prépare ces dissolutions en redissolvant exactement par l'ammoniaque ou la potasse, dans les sels de cuivre quelconques, le précipité d'hydrate d'oxyde de cuivre qui se forme, en évitant toutefois un excès de base.

Si, dans un milieu ainsi préparé, on opère le déplacement du cuivre par le zinc, on remarque :

Que le dépôt est très adhérent et d'un beau brillant;

Que la couleur n'est plus jaune, comme précédemment, mais d'une couleur jaune rouge intermédiaire entre celle du laiton et du cuivre ordinaire.

Dans les solutions salines de cuivre, préparées avec les soins que je viens d'indiquer, on immerge, pendant des temps égaux et très courts, une lame de zinc pur et parfaitement décapée.

Après chaque immersion, on a soin de renouveler la dissolution pour que les conditions de milieu ne varient pas.

La lame est ensuite lavée à l'eau distillée et séchée dans un dessiccateur à vide, avant d'être pesée.

IMMERSION D'UNE LAME DE ZINC DANS UNE DISSOLUTION D'ACÉTATE NEUTRE DE CUIVRE.

*Dépôt très adhérent de couleur jaune du laiton ordinaire.*

| | gr | Différences. |
|---|---|---|
| Poids initial de la lame de zinc ............ .. | 3,0431 | |
| Après deux secondes d'immersion, poids de la lame Zn + Cu.......................... | 3,0434 | + 3 |
| Après deux secondes de plus d'immersion...... | 3,0430 | − 4 |
| » ...... | 3,0428 | − 2 |
| » ...... | 3,0425 | − 3 |
| » ...... | 3,0423 | − 2 |
| » ...... | 3,0421 | − 2 |
| » ...... | 3,0418 | − 3 |
| » ...... | 3,0415 | − 3 |
| » ...... | 3,0413 | − 2 |
| » ...... | 3,0411 | − 2 |

IMMERSION D'UNE LAME DE ZINC DANS UNE DISSOLUTION DE FORMIATE NEUTRE DE CUIVRE.

*Dépôt très adhérent de couleur jaune pâle.*

| | gr | Différences. |
|---|---|---|
| Poids initial de la lame de zinc............... | 4,2230 | |
| Après deux secondes d'immersion, poids de la lame de zinc + Cu...................... | 4,2231 | + 1 |
| Après deux secondes de plus d'immersion...... | 4,2230 | − 1 |
| » ...... | 4,2228 | − 2 |
| » ...... | 4,2227 | − 1 |
| » ...... | 4,2225 | − 2 |
| » ...... | 4,2223 | − 2 |
| » ...... | 4,2221 | − 2 |

IMMERSION D'UNE LAME DE ZINC DANS UNE DISSOLUTION DE PICRATE DE CUIVRE [1].

*Dépôt très adhérent de couleur jaune verdâtre.*

| | | Différences. |
|---|---|---|
| Poids initial de la lame de zinc | 2gr,0321 | |
| Après deux secondes d'immersion, poids de la lame de zinc + Cu | 2,0322 | + 1 |
| Après deux secondes de plus d'immersion | 2,0320 | — 2 |
| » | 2,0319 | — 1 |
| » | 2,0318 | — 1 |
| » | 2,0316 | — 2 |
| » | 2,0314 | — 2 |
| » | 2,0312 | — 2 |
| » | 2,0309 | — 3 |
| » | 2,0307 | — 2 |
| » | 2,0305 | — 2 |

IMMERSION D'UNE LAME DE ZINC DANS UNE DISSOLUTION DE SULFATE DE CUIVRE AMMONIACAL.

*Dépôt très adhérent de couleur jaune rouge.*

| | | Différences. |
|---|---|---|
| Poids initial de la lame de zinc | 3gr,1267 | |
| Après deux secondes d'immersion, poids de la lame de zinc + Cu | 3,1269 | + 2 |
| Après deux secondes de plus d'immersion | 3,1267 | — 2 |
| » | 3,1265 | — 2 |
| » | 3,1260 | — 5 |
| » | 3,1252 | — 8 |
| » | 3,1244 | — 8 |
| » | 3,1236 | — 8 |
| » | 3,1229 | — 7 |
| » | 3,1221 | — 8 |
| » | 3,1214 | — 7 |

Si l'on examine ces Tableaux, on remarque : qu'après le premier moment de l'immersion du zinc dans la dissolution du sel de cuivre, il y a toujours une augmentation du poids de la lame, ensuite une diminution progressive jusqu'à ce qu'elle devienne constante.

Les équivalents du cuivre et du zinc étant 31,75 pour le premier et 32,25 pour le second, il devrait donc y avoir, dans tous les cas, perte de poids, s'il y avait simplement déplacement du cuivre par le zinc.

---

(1) La dissolution de picrate de cuivre a été obtenue en dissolvant à chaud, dans une dissolution d'acide picrique, du carbonate de cuivre hydraté.

Or si l'on tient compte : 1° de la couleur des dépôts variant du blanc jaune au rouge-cuivre en passant par les teintes jaunes intermédiaires, suivant la solution dans laquelle on opère le déplacement ; 2° de l'adhérence parfaite du dépôt ; 3° de l'augmentation de poids de la lame de zinc, on peut dire qu'il se forme dans les milieux neutres ou faiblement alcalins, et dans les premiers moments de l'immersion, des alliages plus ou moins riches en cuivre possédant leur composition.

Il n'y a donc pas, au moment où le zinc est mis au contact de la dissolution cuivrique, simple déplacement d'un métal par l'autre, mais combinaison immédiate des deux métaux.

On remarque de plus que le phénomène n'a lieu que si l'on s'adresse aux sels de cuivre à acides faibles dont la chaleur de neutralisation de l'acide par la base ne dépasse pas $10^{Cal}$ ; et, sans vouloir tirer de conclusions prématurées de cette remarque, j'espère pouvoir, par de nouvelles expériences, limiter ainsi la chaleur de formation de ces alliages.

Après cette première phase de l'expérience, pendant laquelle l'alliage s'est formé, on rentre dans le cas d'un couple (zinc-cuivre) fermé sur lui-même et, par conséquent, on opère la décomposition électrolytique d'un sel de cuivre avec une perte de poids de la lame proportionnelle à la différence des équivalents.

Si l'on n'a pas la précaution de rendre les dissolutions neutres, l'augmentation de poids de la lame de zinc, dans les premiers moments de l'immersion, n'a pas lieu et l'on remarque une diminution immédiate, comme on devait s'y attendre, l'acide libre agissant directement sur le zinc.

On peut obtenir les mêmes résultats que je viens de décrire en s'adressant à une solution cuivrique rendue alcaline par de la potasse, la liqueur cupropotassique par exemple, et alors sans trop se préoccuper de l'excès d'alcali qui, dans ces circonstances, n'attaque pas le cuivre.

Et c'est dans ces cas particuliers que l'on vient d'étudier, des solutions de sels de cuivre à acides faibles ou en liqueurs alcalines, que les dépôts galvanoplastiques, dans le cuivrage direct, peuvent s'effectuer, dépôts dont l'adhérence serait due, d'après mes observations, à cette formation première de l'alliage zinc-cuivre jouant le rôle d'un véritable couple.

Il est facile de répéter, sur les dépôts jaunes obtenus sur les lames de zinc, certaines expériences particulières aux laitons. Si l'on passe rapidement sur le dépôt une baguette de verre, trempée dans de l'acide chlor-

hydrique fort, on laisse une traînée rouge de cuivre, le zinc de l'alliage s'étant dissous en plus grande quantité.

### II. — Déplacement du cuivre par le cadmium.

Une deuxième série d'expériences parallèles aux précédentes a été entreprise avec le cadmium, qui, grâce à son équivalent (56) beaucoup plus élevé que celui du cuivre (31,75), doit donner dans les pesées des différences plus appréciables que lorsque l'on s'adresse au zinc dont l'équivalent se rapproche de celui du cuivre.

Je citerai deux expériences, l'une avec l'acétate neutre de cuivre, l'autre avec la dissolution du sulfate de cuivre ammoniacal.

IMMERSION D'UNE LAME DE CADMIUM DANS UNE DISSOLUTION D'ACÉTATE NEUTRE DE CUIVRE.

*Dépôt adhérent de couleur jaune pâle.*

| | gr | Différences. |
|---|---|---|
| Poids initial de la lame de cadmium .......... | 1,3021 | |
| Après deux secondes d'immersion, poids de la lame de cadmium + Cu.................... | 1,3023 | + 2 |
| Après deux secondes de plus d'immersion. .... | 1,3019 | — 4 |
| » ...... | 1,3012 | — 7 |
| » ...... | 1,3006 | — 6 |
| » ...... | 1,2998 | — 8 |
| » ...... | 1,2990 | — 8 |
| » ...... | 1,2982 | — 8 |
| » ...... | 1,2974 | — 8 |
| » ...... | 1,2967 | — 7 |
| » ...... | 1,2960 | — 7 |
| » ...... | 1,2952 | — 8 |

IMMERSION D'UNE LAME DE CADMIUM DANS UNE DISSOLUTION DE SULFATE DE CUIVRE AMMONIACAL.

*Dépôt adhérent de couleur jaune rougeâtre.*

| | gr | Différences. |
|---|---|---|
| Poids initial de la lame de cadmium.......... | 1,2632 | |
| Après deux secondes d'immersion, poids de la lame de cadmium + Cu.................... | 1,2635 | + 3 |
| Après deux secondes de plus d'immersion...... | 1,2630 | — 5 |
| » ...... | 1,2621 | — 9 |
| » ...... | 1,2613 | — 8 |
| » ...... | 1,2604 | — 9 |
| » ...... | 1,2586 | — 8 |
| » ...... | 1,2578 | — 8 |
| » ...... | 1,2569 | — 8 |

En examinant ces Tableaux, on remarque que la marche du phénomène est la même quand on opère le déplacement du cuivre dans des dissolutions à l'aide du zinc ou du cadmium.

Avec le dernier métal l'augmentation de poids est d'autant plus sensible et digne de remarque que les poids des deux métaux, se déplaçant proportionnellement à leurs équivalents, sont plus différents.



et il sera quelquefois plus commode d'écrire X et Y sous forme homogène

$$X = a_0 x^4 - 4a_1 x^3 x' - 6a_2 x^2 x'^2 - 4a_3 x x'^3 - a_4 x'^4,$$
$$Y = b_0 y^4 - 4b_1 y^3 y' - 6b_2 y^2 y'^2 - 4b_3 y y'^3 - b_4 y'^4,$$

et nous emploierons sans distinction ces formes non homogènes ou homogènes; il faudra toujours supposer dans ces dernières $x' = y' = 1$.

**2.** Voici deux remarques qui se présentent immédiatement. On constate [illegible] les invariants de X

$$S = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2,$$
$$T = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4,$$

et les invariants correspondants $S_1$, $T_1$ de Y, on a

$$S = S_1,$$
$$T = T_1.$$

C'est là une conséquence immédiate de la propriété caractéristique des invariants. En effet, la valeur de Y se déduit de celle de X en remplaçant

$x$ par [illegible],
$x'$ par [illegible]

et en divisant ensuite par [illegible].

Ainsi [illegible]

[illegible] $= S$

[illegible] $= T$

En second lieu, [illegible] les équations $X = 0$, $Y = 0$. En les désignant par [illegible] respectivement, il est clair que

[illegible]

et par conséquent [illegible] des racines de $X = 0$ est égal [illegible] des racines correspondantes de $Y = 0$.

image
not
available

3. Nous posons maintenant la question suivante : étant donnés deux polynômes du quatrième degré X, Y, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il soit possible de satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

par une relation de la forme

$$p + qx + ry + sxy = 0 ?$$

La réponse est presque immédiate. D'après ce qui précède, il est *nécessaire* certainement que les invariants de X soient égaux aux invariants de Y, mais il est facile à voir que cette condition est aussi suffisante.

En effet, on peut remarquer d'abord que cette égalité des invariants entraîne aussi l'égalité des rapports anharmoniques des racines de $X = 0$ et des racines de $Y = 0$.

Ce fait bien connu, nous allons le déduire ici des formules qui donnent la résolution de l'équation $X = 0$, dont nous aurons besoin encore dans la suite.

On a d'abord à calculer les racines $u'$, $u''$, $u'''$ de l'équation cubique

$$4u^3 - Su - T = 0. \tag{1}$$

Ensuite on a à calculer les racines carrées

$$\left\{\begin{aligned} m' &= \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 u'}, \\ m'' &= \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 u''}, \\ m''' &= \sqrt{a_1^2 - a_0 a_2 - a_0 u'''}; \end{aligned}\right. \tag{2}$$

mais, à cause de la relation

$$m'm''m''' = -\tfrac{1}{2}(2a_1^3 - 3a_0a_1a_2 + a_0^2a_3),$$

on peut exprimer par exemple $m'''$ rationnellement au moyen de

de $X = 0$ sont alors données par les formules

$$\left\{\begin{aligned} a_0x_1 &= -a_1 + m' + m'' + m''', \\ a_0x_2 &= -a_1 + m' - m'' - m''', \\ a_0x_3 &= -a_1 - m' + m'' - m''', \\ a_0x_4 &= -a_1 - m' - m'' + m''' \end{aligned}\right.$$

Ces formules conduisent directement à cette conséquence que les rapports anharmoniques de $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ s'expriment *rationnellement* par les racines $u'$, $u''$, $u'''$. En effet, on trouve, par exemple,

$$(1.2.3.4) = \lambda = \frac{m'^2 - m''^2}{m'^2 - m'''^2}$$

ou bien

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \lambda &= \frac{u' - u'''}{u' - u''}, & \frac{1}{\lambda} &= \frac{u' - u''}{u' - u'''},\\ 1 - \lambda &= \frac{u'' - u'''}{u'' - u'}, & \frac{1}{1-\lambda} &= \frac{u'' - u'}{u'' - u'''},\\ \frac{\lambda - 1}{\lambda} &= \frac{u''' - u''}{u''' - u'}, & \frac{\lambda}{\lambda - 1} &= \frac{u''' - u'}{u''' - u''}. \end{aligned}\right.$$

Or, comme l'équation $\mathrm{Y} = 0$ donne lieu à la même équation résolvante en $u$, on voit bien que l'égalité des invariants entraîne l'égalité des rapports anharmoniques.

Ce point étant établi, supposons

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} : \frac{y_1 - y_4}{y_2 - y_4},$$

et supposons qu'on détermine les coefficients $p$, $q$, $r$, $s$ dans la relation

$$(6)\qquad p + qx + ry + sxy = 0,$$

par la condition que, pour

$$\begin{aligned} x &= x_1, & y &= y_1,\\ x &= x_2, & y &= y_2,\\ x &= x_3, & y &= y_3, \end{aligned}$$

on aura aussi nécessairement, pour $x = x_4$, $y = y_4$.

La substitution (6) donnera alors nécessairement un résultat de cette forme

$$\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{c\mathrm{Y}}},$$

où $c$ est une constante. Mais maintenant les invariants de $c\mathrm{Y}$ doivent encore être égaux à ceux de X ou de Y, ce qui donne

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} c^2\mathrm{S} &= \mathrm{S},\\ c^3\mathrm{T} &= \mathrm{T}; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on conclut $c = +1$.



Nous venons de déterminer les coefficients $p, q, r, s$ (ou plutôt leurs rapports) par la condition de la correspondance des valeurs suivantes de $x$ et de $y$ :

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} x = x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \\ y = y_1, \ y_2, \ y_3, \ y_4; \end{cases}$$

mais, à cause de

$$(1.2.3.4) = (2.1.4.3) = (3.4.1.2) = (4.3.2.1),$$

il est clair qu'on aurait pu établir les correspondances suivantes :

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x = x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \\ y = y_2, \ y_1, \ y_4, \ y_3; \end{cases}$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} x = x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \\ y = y_3, \ y_4, \ y_1, \ y_2; \end{cases}$$

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} x = x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \\ y = y_4, \ y_3, \ y_2, \ y_1. \end{cases}$$

Nous obtenons donc le résultat suivant :

Pour qu'il soit possible de satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

par une relation de la forme

$$p + qx + ry + sxy = 0,$$

il faut et il suffit que les invariants de X soient égaux aux invariants de Y; et, si cette condition est remplie, il existe toujours quatre relations de cette forme qui satisfont à l'équation différentielle.

On peut nommer ces relations des intégrales linéaires de l'équation différentielle, et notre but principal sera maintenant d'approfondir au point de vue algébrique la détermination de ces intégrales linéaires.

Il faut remarquer, en effet, que, d'après ce qui précède, on peut bien écrire directement ces intégrales linéaires, mais à condition d'avoir résolu d'abord les équations $X = 0$ et $Y = 0$. Les opérations non rationnelles nécessaires pour cela sont d'abord la détermination des trois racines $u'$, $u''$, $u'''$ de l'équation cubique en $u$, et ensuite on a à calculer encore quatre racines carrées.

Mais, comme on vient de reconnaître que le problème admet toujours quatre solutions, la solution doit dépendre d'une *seule* équation du quatrième degré, et ainsi il doit être possible d'obtenir rationnellement ces intégrales linéaires après avoir calculé les racines d'une équation cubique et *deux* racines carrées.

Ainsi, au point de vue algébrique, la méthode qui consiste à passer par les racines de $X = 0$, $Y = 0$ n'a pas toute la simplicité possible.

Mais, avant d'aborder le problème que nous venons de poser, il convient de compléter encore par quelques remarques ces considérations préliminaires.

4. Nous avons vu que les rapports anharmoniques des $x_1, x_2, x_3, x_4$ s'expriment rationnellement au moyen des racines $u'$, $u''$, $u'''$. Or, dans les formules (4), les racines carrées doivent satisfaire à la relation (3) et par conséquent il est permis de changer à la fois le signe de deux de ces racines carrées. Il est clair qu'un tel changement de signes revient à une certaine permutation des racines $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ et l'on conclut maintenant que ces permutations sont précisément celles qui laissent invariable le rapport anharmonique.

Il est facile à trouver directement l'équation du sixième degré qui détermine les rapports anharmoniques. Les coefficients de cette équation sont évidemment des fonctions symétriques de $u'$, $u''$, $u'''$ et s'expriment ainsi rationnellement par S et T.

Les équations (5) donnent facilement

$$3u' = (u' - u'')(1 + \lambda),$$
$$3u'' = (u' - u'')(-2 + \lambda),$$
$$3u''' = (u' - u'')(+1 - 2\lambda),$$

et, en substituant ces expressions dans les relations

$$S = -4(u'u'' + u''u''' + u'''u'),$$
$$T = 4u'u''u''',$$

il vient

$$9S = +4(u' - u'')^2\, 3(1 - \lambda + \lambda^2),$$
$$27T = 4(u' - u'')^3 (1 + \lambda)(-2 + \lambda)(1 - 2\lambda);$$

donc

$$\frac{S^3}{T^2} = 108\,\frac{(1 - \lambda + \lambda^2)^3}{(1 + \lambda)^2 (2 - \lambda)^2 (1 - 2\lambda)^2}. \tag{8}$$

On vérifie directement que le second membre ne change pas en remplaçant $\lambda$ par $\frac{1}{\lambda}$ ou par $1-\lambda$.

La résolution de cette équation du sixième degré, nous le savons, ne renferme pas de plus grandes difficultés que la résolution d'une équation cubique. En effet, ses racines s'expriment rationnellement au moyen de $u'$, $u''$, $u'''$; mais, comme l'équation (8) ne renferme que le seul paramètre $\frac{S^3}{T^2}$ qui est un invariant absolu, il vaut mieux introduire aussi dans l'équation cubique ce seul paramètre.

Soit donc $Su = Tv$ : il vient

$$4v^3 - \frac{S^3}{T^2}(v+1) = 0,$$

et, en désignant par $v'$, $v''$, $v'''$ les racines, on a

$$\lambda = \frac{v' - v''}{v' - v'''}, \qquad \cdots\cdot$$

Lorsque l'équation $X = 0$ admet une racine double, les valeurs du rapport anharmonique sont

$$\infty, \quad \infty, \quad 1, \quad 1, \quad 0, \quad 0,$$

et ainsi l'équation (8) doit se réduire à

$$\lambda^2(\lambda-1)^2 = 0.$$

On voit que cela exige que $S^3 - 27T^2 = 0$, et l'on sait en effet que le discriminant de $X$ est égal à $256(S^3 - 27T^2)$. Comme conséquence, on peut écrire, au lieu de (8),

$$\frac{4(1-\lambda+\lambda^2)^3}{S^3} = \frac{(1+\lambda)^2(2-\lambda)^2(1-2\lambda)^2}{27T^2} = \frac{27\lambda^2(\lambda-1)^2}{S^3-27T^2}.$$

5. Considérons maintenant les cas particuliers que nous avons déjà énumérés dans le n° 2.

A. $\lambda = -1$ (ou $= 2$, ou $= \frac{1}{2}$) :

Dans ce cas on a $\lambda = \frac{1}{\lambda}\cdot$ Il semble donc que, pour transformer au moyen d'une substitution linéaire $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ en $\pm\frac{dy}{\sqrt{Y}}$, on puisse employer non seulement les correspondances (I), (II), (III), (IV) du n° 3, mais encore les sui-



vantes :

(I′) $\begin{cases} x = x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \\ y = y_1, & y_2, & y_4, & y_3; \end{cases}$

(II′) $\begin{cases} x = x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \\ y = y_2, & y_1, & y_3, & y_4; \end{cases}$

(III′) $\begin{cases} x = x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \\ y = y_3, & y_4, & y_2, & y_1; \end{cases}$

(IV′) $\begin{cases} x = x_1, & x_2, & x_3, & x_4, \\ y = y_4, & y_3, & y_1, & y_2. \end{cases}$

Faut-il en conclure que dans ce cas exceptionnel il existe huit substitutions linéaires qui transforment $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ en $\pm \frac{dy}{\sqrt{Y}}$? Il n'en est rien. En effet, l'équation (8) montre qu'on a dans le cas actuel $T = 0$. Mais alors les relations (7) se réduisent à

$$c^2 S = S,$$

et l'on peut en conclure seulement $c = \pm 1$.

Donc, dans le cas $T = 0$, il n'existe pas seulement quatre intégrales linéaires de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}};$$

mais il y en a autant qui donnent

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{-Y}}.$$

Les unes seront données par les correspondances (I), (II), (III), (IV) et les autres par les correspondances (I′), (II′), (III′), (IV′).

Le second cas :

B. $\lambda = 1 + \varepsilon$ (ou $= 1 + \varepsilon^2$), donne lieu à des remarques analogues. L'équation (8) montre que $S = 0$, et les relations (7) se réduisent à

$$c^3 T = T;$$

d'où l'on peut conclure seulement $c = 1$, $c = \varepsilon$, $c = \varepsilon^2$.

Chacune des trois équations

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{\varepsilon Y}},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{\varepsilon^2 Y}}$$

admettra quatre intégrales linéaires. Les unes sont déterminées par les correspondances (I), (II), (III), (IV) et les autres par celles-ci

$$\begin{array}{ll}
\left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_1,\ y_3,\ y_4,\ y_2; \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_1,\ y_4,\ y_2,\ y_3; \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_2,\ y_4,\ y_3,\ y_1; \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_2,\ y_3,\ y_1,\ y_4; \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_3,\ y_1,\ y_2,\ y_4; \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_3,\ y_2,\ y_4,\ y_1; \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_4,\ y_2,\ y_1,\ y_3; \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ y = y_4,\ y_1,\ y_3,\ y_2. \end{array}\right.
\end{array}$$

6. Comme application des considérations précédentes, considérons la réduction à la forme normale

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{M\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

M étant une constante. Le rapport anharmonique de $+1, -1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ étant $\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2$, il faudra déterminer $k$ par la relation

$$\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 = \lambda.$$

On trouve ainsi deux valeurs réciproques de $k$; à chacune d'elles correspondent quatre substitutions linéaires, et, si l'on se souvient que $\lambda$ a six valeurs, il semble qu'on obtient ainsi 48 substitutions linéaires qui réduisent à la forme normale la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{X}}$. Mais il faut remarquer que le changement de $\lambda$ en $\frac{1}{\lambda}$ correspond au changement de $k$ en $-k$; par suite, le nombre des substitutions linéaires se réduit à vingt-quatre, et le nombre des valeurs

de $k^2$ est six, qui sont réciproques deux à deux. Si $\pm k$ est l'une des valeurs du module, les autres sont égales à

$$\pm\frac{1}{k},\quad \pm\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2,\quad \pm\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2,\quad \pm\left(\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right)^2,\quad \pm\left(\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right)^2.$$

Une autre méthode, plus simple à beaucoup d'égards, consiste à poser d'abord

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{M\,dy}{\sqrt{y(1-y)(1-k_1^2 y)}}.$$

Les racines de $Y=0$ sont $1, \frac{1}{k_1^2}, 0, \infty$. Leur rapport anharmonique est $k_1^2$ et l'on a ainsi

$$k_1^2 = \lambda.$$

On voit qu'ici la signification de $k_1^2$ est beaucoup plus simple que dans le premier cas. On trouve encore six valeurs de $k_1^2$ et vingt-quatre substitutions linéaires. En posant $y=z^2$, on est ramené à la forme canonique ordinaire. Mais il faut remarquer que, si les coefficients de X sont réels et qu'on veuille avoir une valeur de $k_1^2$ qui soit réelle et comprise entre 0 et 1, cette seconde méthode n'est applicable que dans le cas où les racines de $X=0$ sont réelles. Mais il n'entre pas dans nos intentions de discuter ces substitutions en ayant égard aux limites entre lesquelles $x$ et $y$ sont variables; c'est une discussion qu'on trouve dans les Traités des fonctions elliptiques. Constatons seulement, en terminant ces considérations préliminaires, que les intégrales linéaires de

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

sont

$$x-y=0,\qquad x+y=0,\qquad 1-kxy=0,\qquad 1+kxy=0.$$

### DÉTERMINATION DES INTÉGRALES LINÉAIRES DE L'ÉQUATION $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{Y}}$.

7. La méthode la plus directe pour résoudre le problème proposé consisterait à effectuer la substitution

$$p+qx+ry+sxy=0$$

ou

$$x = -\frac{p + ry}{q + sy}.$$

On trouve ainsi par identification

$$(ps - qr)^2 b_0 = r^4 a_0 - 4 r^3 s a_1 + 6 r^2 s^2 a_2 - 4 r s^3 a_3 + s^4 a_4,$$

$$(ps - qr)^2 b_1 = r_3 p a_0 - r^2(3ps + qr) a_1 + 3rs(ps + qr) a_2 - s^2(ps + 3qr) a_3 + s^3 q a_4,$$

$$(ps - qr)^2 b_2 = r^2 p^2 a_0 - 2rp(ps + qr) a_1 + (p^2 s^2 + q^2 s^2 + 4pqrs) a_2 - 2qs(ps + qr) a_3 + q^2 s^2 a_4,$$

$$(ps - qr)^2 b_3 = r p^3 a_0 - p^2(ps + 3qr) a_1 + 3pq(ps + qr) a_2 - q^2(3ps + qr) a_3 + q^3 s a_4,$$

$$(ps - qr)^2 b_4 = p^4 a_0 - 4p^3 q a_1 + 6 p^2 q^2 a_2 - 4 p q^3 a_3 + q^4 a_4.$$

Ces cinq relations, à cause de l'égalité des invariants de X et de Y, se réduisent à trois relations distinctes seulement, et le problème qui consiste à déterminer les rapports des quantités $p$, $q$, $r$, $s$ est déterminé.

Mais c'est une voie bien différente qui nous conduira à la solution du problème.

8. Nous aurons à nous appuyer dans ce qui suit sur certains résultats de la théorie algébrique des formes biquadratiques, pour lesquels nous renvoyons le lecteur aux Mémoires classiques de M. Hermite *Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées*, dans le tome 52 du *Journal de Crelle*.

Désignons par $H_x$ le hessien de X

$$H_x = \frac{1}{144}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial x'} \\ \frac{\partial^2 X}{\partial x'\,\partial x} & \frac{\partial^2 X}{\partial x'^2} \end{vmatrix},$$

$$H_x = (a_0 a_2 - a_1^2)x^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2)x^3 + (a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2)x^2 + 2(a_1 a_4 - a_2 a_3)x + (a_2 a_4 - a_3^2),$$

et par $J_x$ le covariant du sixième degré qui est le jacobien de X et de $H_x$

$$J_x = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial x'} \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} & \frac{\partial H_x}{\partial x'} \end{vmatrix},$$

$$J_x = (a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3)x^6 + \ldots.$$

Les covariants sont liés par la relation

$$4H_x^3 - SH_xX^2 + TX^3 = -J_x^2,$$

d'où M. Hermite a tiré cette conséquence importante, qu'en posant

$$u = -\frac{H_x}{X}$$

il vient

$$\frac{2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\pm\,du}{\sqrt{4u^3 - Su - T}}.$$

Désignons maintenant par $H_y$, $J_y$ les covariants de Y; en posant

$$v = -\frac{H_y}{Y},$$

il viendra de la même manière

$$\frac{2\,dy}{\sqrt{Y}} = \frac{\pm\,dv}{\sqrt{4v^3 - Sv - T}}.$$

Il est évident par là que la relation $u = v$, c'est-à-dire

$$XH_y - YH_x = 0,$$

satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

Cherchons à approfondir maintenant la nature de cette intégrale particulière.

Pour cela, considérons d'abord le cas particulier

$$X = (1 - x^2)(1 - k^2x^2),$$
$$Y = (1 - y^2)(1 - k^2y^2).$$

On trouve par un calcul facile

$$\begin{aligned} XH_y - YH_x &= 4(1 - k^2)^2(x - y)(x + y)(1 - kxy)(1 + kxy) \\ &= 4(1 - k^2)^2(xy' - yx')(xy' + yx')(x'y' - kxy)(x'y' + kxy). \end{aligned}$$

L'intégrale

$$XH_y - YH_x = 0$$

a donc une nature toute particulière; on voit qu'elle se décompose ainsi

$$x-y=0, \qquad x+y=0, \qquad 1-kxy=0, \qquad 1+kxy=0,$$

et elle résume donc les quatre intégrales linéaires de l'équation différentielle.

9. Il est facile maintenant d'étendre ce théorème au cas général et de montrer que

$$XH_y - YH_x$$

est égal au produit de quatre expressions linéaires de cette forme

$$p+qx+ry+sxy,$$

et alors il est clair que notre problème revient simplement à décomposer $XH_y - YH_x$ en quatre facteurs.

En effet, c'est là une conséquence de ce fait que H, $H_x$, Y, $H_y$ sont des *covariants*.

Nous savons que, par une substitution

$$\frac{x}{x'} = \frac{\alpha x_1 + \beta x'_1}{\gamma x_1 + \delta x'_1},$$

on peut réduire

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} \text{ à la forme canonique } \frac{dx_1}{\sqrt{C(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2)}}.$$

Par une substitution analogue, on réduira

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} \text{ à la forme canonique } \frac{dy_1}{\sqrt{C'(1-y_1^2)(1-k^2y_1^2)}}$$

et, à cause de l'égalité des invariants de X et de Y, on peut faire en sorte qu'on ait la même valeur de $k^2$ dans les différentielles transformées, et alors on a aussi nécessairement $C = C'$. On est ramené ainsi au cas particulier que nous venons de considérer, et, si l'on écrit

$$C(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2) = X_1,$$
$$C(1-y_1^2)(1-k^2y_1^2) = Y_1,$$

on a

$$X_1H_{y_1} - Y_1H_{x_1}$$
$$= \tfrac{1}{2}(1-k^2)^2C^2(x_1y'_1 - y_1x'_1)(x_1y'_1 + y_1x'_1)(x'_1y'_1 - kx_1y_1)(x'_1y'_1 + kx_1y_1).$$

Mais $X_1$ s'obtient en remplaçant dans X

$$x \quad \text{par} \quad \alpha x_1 + \beta x'_1,$$
$$x' \quad \text{par} \quad \gamma x_1 + \delta x'_1,$$

et en divisant ensuite par $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$. Ainsi l'on peut écrire

$$X = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 X_1,$$

et, en vertu de la propriété caractéristique des covariants, on trouve aussi

$$H_x = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 H_{x_1}.$$

On aura de même

$$Y = (\alpha'\delta' - \beta'\gamma')^2 Y_1,$$
$$H_y = (\alpha'\delta' - \beta'\gamma')^2 H_{y_1}.$$

Par conséquent, pour avoir $XH_y - YH_x$, il suffit de remplacer dans l'expression de $X_1 H_{y_1} - Y_1 H_{x_1}$, $x_1$, $x'_1$, $y_1$, $y'_1$ par leurs valeurs en $x$, $x'$, $y$, $y'$ tirées des relations

$$x = \alpha x_1 + \beta x'_1,$$
$$x' = \gamma x_1 + \delta x'_1;$$

$$y = \alpha' y_1 + \beta' y'_1,$$
$$y' = \gamma' y_1 + \delta' y'_1,$$

et de multiplier par $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2(\alpha'\delta' - \beta'\gamma')^2$. On aurait même pu supposer égaux à l'unité les déterminants des substitutions. Il est clair que l'expression ainsi obtenue se présente bien sous la forme d'un produit de quatre expressions, telles que

$$px'y' + qxy' + ryx' + sxy = p + qx + ry + sxy.$$

Ainsi nous pouvons énoncer la propriété suivante :

*Lorsque deux formes biquadratiques* X, Y *ont leurs invariants égaux, alors l'expression*

$$XH_y - YH_x$$

*est décomposable en un produit de quatre expressions de cette forme*

$$p + qx + ry + sxy,$$

*et, en annulant ces facteurs, on obtient précisément les quatre intégrales*

*linéaires de l'équation différentielle*

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

**10.** Il faut donc étudier cette décomposition de

$$XH_y - YH_x.$$

Rappelons d'abord les relations identiques

$$4H_x^3 - SH_x X^2 + TX^3 = -J_x^2,$$
$$4H_y^3 - SH_y Y^2 + TY^3 = -J_y^2.$$

En désignant par $u'$, $u''$, $u'''$ les racines de l'équation

$$4u^3 - Su - T = 0,$$

on voit par là qu'on a

$$4(H_x + u'X)(H_x + u''X)(H_x + u'''X) = -J_x^2,$$
$$4(H_y + u'Y)(H_y + u''Y)(H_y + u'''Y) = -J_y^2.$$

Or, $H_x$ et X n'ayant pas de facteur commun en général, les facteurs $H_x + u'X$, $H_y + u'Y$, ... sont nécessairement des carrés parfaits (HERMITE, *loc. cit.*, p. 15, 16). Posons donc

(9) $$\begin{cases} H_x + u'X = \varphi_x'^2, \\ H_x + u''X = \varphi_x''^2, \\ H_x + u'''X = \varphi_x'''^2; \end{cases}$$

(10) $$\begin{cases} H_y + u'Y = \varphi_y'^2, \\ H_y + u''Y = \varphi_y''^2, \\ H_y + u'''Y = \varphi_y'''^2, \end{cases}$$

$\varphi_x'$, $\varphi_x''$, $\varphi_x'''$ seront des polynômes du second degré.

Nous cherchons à résoudre l'équation $XH_y - YH_x = 0$ par rapport à $x$ en y regardant $y$ comme connu. On a donc

$$\frac{X}{Y} = \frac{H_x}{H_y} = \frac{H_x + u'X}{H_y + u'Y} = \frac{H_x + u''X}{H_y + u''Y} = \frac{H_x + u'''X}{H_y + u'''Y} = M^2,$$

et, par conséquent,

$$(11)\qquad \begin{cases} \varphi'_x = M\varphi'_y, \\ \varphi''_x = M\varphi''_y, \\ \varphi'''_x = M\varphi'''_y. \end{cases}$$

Si nous ajoutons ces équations après les avoir multipliées respectivement par $(u''-u''')\varphi'_y$, $(u'''-u')\varphi''_y$, $(u'-u'')\varphi'''_y$, il vient, eu égard aux formules (10),

$$(u''-u''')\varphi'_x\varphi'_y+(u'''-u')\varphi''_x\varphi''_y+(u'-u'')\varphi'''_x\varphi'''_y=0.$$

C'est là une équation du second degré qui doit admettre au moins une racine de $XH_y - YH_x = 0$; mais on constate que cette équation du second degré a ses deux racines égales. En effet, la différentielle

$$(u''-u''')\varphi'_y\,d\varphi'_x+(u'''-u')\varphi''_y\,d\varphi''_x+(u'-u'')\varphi'''_y\,d\varphi'''_x$$

se trouve égale à

$$\frac{1}{M}[(u''-u''')\varphi'_x\,d\varphi'_x+(u'''-u')\varphi''_x\,d\varphi''_x+(u'-u'')\varphi'''_x\,d\varphi'''_x]$$

ou à

$$\frac{1}{2M}[(u''-u''')\,d(H_x+u'X)+(u'''-u')\,d(H_x+u''X)+(u'-u'')\,d(H_x+u'''X)]$$

et s'annule par conséquent.

Nous obtenons donc ce résultat, qui donne la solution du problème proposé :

*L'expression*

$$(u''-u''')\varphi'_x\varphi'_y+(u'''-u')\varphi''_x\varphi''_y+(u'-u'')\varphi'''_x\varphi'''_y$$

*est, sauf un facteur constant, le carré d'un des facteurs de* $XH_y - YH_x$.

Sous une forme légèrement modifiée, nous pouvons dire qu'on a d'abord à calculer les fonctions $\psi'$, $\psi''$, $\psi'''$ par les relations

$$\begin{aligned} \psi'^2 &= (H_x+u'X)(H_y+u'Y), \\ \psi''^2 &= (H_x+u''X)(H_y+u''Y), \\ \psi'''^2 &= (H_x+u'''X)(H_y+u'''Y); \end{aligned}$$

ensuite on aura les carrés des facteurs linéaires de $XH_y - YH_x$ (sauf des

facteurs constants) sous la forme

$$(\mathrm{A}) \qquad \pm(u''-u''')\psi' \pm (u'''-u')\psi'' \pm (u'-u'')\psi'''.$$

Il est clair qu'on obtiendra bien ainsi les quatre facteurs de $XH_y - YH_x$; car, en changeant à la fois les signes de $\psi'$, $\psi''$, $\psi'''$, on obtient la même intégrale linéaire de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

Quelles sont maintenant les opérations irrationnelles qu'exige cette détermination des intégrales linéaires? D'abord on a à calculer les trois racines de l'équation cubique

$$4u^3 - Su - T = 0;$$

et ensuite on voit que la détermination de chacune des fonctions $\psi'$, $\psi''$, $\psi'''$ exige le calcul d'une racine carrée. Mais il est à noter qu'on peut multiplier l'expression (A) par un facteur constant quelconque. En multipliant donc par une des racines carrées à calculer, on voit que le calcul de *deux* racines carrées suffit pour obtenir, sous forme explicite, les intégrales linéaires. On peut remarquer que le coefficient de $x^4y^4$, dans l'expression de $\psi'^2$, est

$$(a_0a_2 - a_1^2 + a_0u')(b_0b_2 - b_1^2 + b_0u'),$$

et ainsi les fonctions $\psi'$, $\psi''$, $\psi'''$ sont connues après avoir obtenu les racines carrées

$$r' = \sqrt{(a_0a_2 - a_1^2 + a_0u')(b_0b_2 - b_1^2 + b_0u')},$$
$$r'' = \sqrt{(a_0a_2 - a_1^2 + a_0u'')(b_0b_2 - b_1^2 + b_0u'')},$$
$$r''' = \sqrt{(a_0a_2 - a_1^2 + a_0u''')(b_0b_2 - b_1^2 + b_0u''')}.$$

Mais le produit de ces trois racines carrées est égal, au signe près, à

$$\tfrac{1}{4}(a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3)(b_0^2b_3 - 3b_0b_1b_2 + 2b_1^3),$$

et ainsi $r'''$ sera connu dès qu'on connaît $r'$ et $r''$. Toutefois, il peut arriver que le terme avec $x^4y^4$ manque dans $\psi'^2$, $\psi''^2$ ou $\psi'''^2$, mais, en tout cas, il est clair, par ce qui précède, que le calcul de *deux* racines carrées et la connaissance des racines $u'$, $u''$, $u'''$ permettent d'obtenir les intégrales linéaires cherchées. Cette solution jouit donc, au point de vue algébrique, de toute la simplicité compatible avec la nature du problème proposé.

EXAMEN D'UN CAS PARTICULIER. ÉQUATION D'EULER.

11. On peut donner une autre forme à la solution du problème et la faire dépendre *directement* d'une équation du *quatrième degré*. Mais, pour reconnaître l'intérêt qui s'attache à cette seconde forme, il est utile d'étudier d'abord le cas particulier où l'on a

$$a_i = b_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, 4),$$

en sorte qu'il s'agit de la détermination des intégrales linéaires de l'équation d'Euler

$$(12) \quad \frac{dx^2}{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4} = \frac{dy^2}{a_0y^4 + 4a_1y^3 + 6a_2y^2 + 4a_3y + a_4}.$$

Il est clair que, dans ce cas particulier, on obtient $\psi'$, $\psi''$, $\psi'''$ sans avoir à extraire aucune racine carrée, et la connaissance de $u'$, $u''$, $u'''$ suffit.

Prenons pour $\psi'$, $\psi''$, $\psi'''$ les valeurs

$$\psi' = (a_0a_2 - a_1^2 + a_0u')x^2y^2 + \ldots,$$
$$\psi'' = (a_0a_2 - a_1^2 + a_0u'')x^2y^2 + \ldots,$$
$$\psi''' = (a_0a_2 - a_1^2 + a_0u''')x^2y^2 + \ldots.$$

On peut d'abord mettre ces valeurs de $\psi'$, $\psi''$, $\psi'''$ sous une autre forme.

Il est clair que $\psi'$, par exemple, est symétrique en $x$ et $y$, et de plus, si l'on pose $y = x$, $\psi'$ doit se réduire à $H_x + u'X$. Or, si deux polynômes doublement quadratiques et symétriques en $x$ et $y$ coïncident entre eux pour $x = y$, ils peuvent différer seulement par un terme $\lambda(x - y)^2$. Il suffit de les écrire explicitement pour reconnaître l'exactitude de cette proposition, qui est due à M. Halphen.

Mais la seconde polaire de $H_x + u'X$

$$\frac{1}{12}\left[y^2 \frac{\partial^2(H_x + u'X)}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2(H_x + u'X)}{\partial x\, \partial x'} + \frac{\partial^2(H_x + u'X)}{\partial x'^2}\right]$$

est d'abord symétrique en $x$ et $y$ et se réduit aussi à $H_x + u'X$ pour $x = y$. On a, par conséquent,

$$\psi' = \frac{1}{12}\left[y^2 \frac{\partial^2(H_x + u'X)}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2(H_x + u'X)}{\partial x\, \partial x'^2} + \frac{\partial^2(H_x + u'X)}{\partial x'^2}\right] + \lambda'(x - y)^2.$$

Il reste à déterminer $\lambda'$. Cette détermination pourrait se faire déjà ici en

calculant directement le coefficient de $xy$ dans $\psi'$ : on trouverait ainsi

$$\lambda' = 2\,\frac{A_2 A_1 - A_2^2}{A_1},$$

où l'on a supposé

$$H_x + u'X = A_0 x^4 + 4A_1 x^3 + 6A_2 x^2 + 4A_3 x + A_4.$$

Mais il existe une expression beaucoup plus simple pour $\lambda'$ qui s'offrira d'elle-même dans la suite. Nous nous bornerons donc à observer que $\lambda'$ doit être une fonction rationnelle de $u'$, et peut dès lors se mettre sous la forme d'un polynôme du second degré en $u'$,

$$\lambda' = 2\alpha u'^2 + \beta u' + \gamma.$$

Posons, pour abréger,

$$12h = y^2\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2 H_x}{\partial x\,\partial x'} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial x'^2},$$

$$12f = y^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial x'} + \frac{\partial^2 X}{\partial x'^2},$$

en sorte que $h$ et $f$ sont les secondes polaires de $H_x$ et de $X$, on aura, d'après ce qui précède,

$$\psi' = h + u'f + (2\alpha u'^2 + \beta u' + \gamma)(x-y)^2,$$
$$\psi'' = h + u''f + (2\alpha u''^2 + \beta u'' + \gamma)(x-y)^2,$$
$$\psi''' = h + u'''f + (2\alpha u'''^2 + \beta u''' + \gamma)(x-y)^2.$$

Les carrés des facteurs de $XH_y - YH_x$ sont, en général,

$$(u''-u''')\psi' - (u'''-u')\psi'' - (u'-u'')\psi''',$$
$$+(u''-u''')\psi' - (u'''-u')\psi'' - (u'-u'')\psi''',$$
$$-(u''-u''')\psi' + (u'''-u')\psi'' - (u'-u'')\psi''',$$
$$-(u''-u''')\psi' - (u'''-u')\psi'' - (u'-u'')\psi'''.$$

La première expression se réduit évidemment à

$$2\alpha(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')\,[illegible]\,(\alpha'-\alpha'')(x-y)^2,$$

et donne ainsi la substitution linéaire $x - y = 0$. Cette solution était évidente a priori.

La seconde expression devient égale à

$$-2\alpha(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')(\alpha'-\alpha'')\,[illegible]\,(x-y)^2 - 2(\alpha'-\alpha'')\,[illegible]$$

ou bien, en divisant par $2(u'' - u''')$,

$$\psi' - \alpha(u' - u'')(u' - u''')(x - y)^2,$$

mais on a évidemment

$$(u' - u'')(u' - u''') = \frac{d}{du}\left(u^3 - \tfrac{1}{4}\mathrm{S}u - \tfrac{1}{4}\mathrm{T}\right)_{u=u'} = 3u'^2 - \tfrac{1}{4}\mathrm{S},$$

en sorte qu'on obtient

$$h + u'f + \left(-\alpha u'^2 + \beta u' + \gamma + \tfrac{1}{4}\alpha\mathrm{S}\right)(x - y)^2.$$

Ici se présente maintenant le moyen de déterminer les valeurs de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ par cette condition que l'expression précédente doit être un carré parfait.

12. Considérons l'expression

$$\mathfrak{L} = h + u'f + \mathrm{C}(x - y)^2,$$

où C est une constante quelconque. On peut écrire

$$\mathfrak{L} = \mathrm{P}y^2 + 2\mathrm{Q}y + \mathrm{R} + \mathrm{C}(x - y)^2,$$

$$\mathrm{P} = \frac{1}{12}\,\frac{\partial^2(\mathrm{H}_x + u'\mathrm{X})}{\partial x^2},$$

$$\mathrm{Q} = \frac{1}{12}\,\frac{\partial^2(\mathrm{H}_x + u'\mathrm{X})}{\partial x\,\partial x'},$$

$$\mathrm{R} = \frac{1}{12}\,\frac{\partial^2(\mathrm{H}_x + u'\mathrm{X})}{\partial x'^2},$$

et le discriminant $\Delta$ de $\mathfrak{L}$ est

$$(\mathrm{Q} - \mathrm{C}x)^2 - (\mathrm{P} + \mathrm{C})(\mathrm{R} + \mathrm{C}x^2),$$

c'est-à-dire

$$\Delta = \mathrm{Q}^2 - \mathrm{PR} - (\mathrm{P}x^2 + 2\mathrm{Q}x + \mathrm{R})\mathrm{C}.$$

Or il est clair que

$$\mathrm{P}x^2 + 2\mathrm{Q}x + \mathrm{R} = \mathrm{H}_x + u'\mathrm{X}.$$

D'autre part, $\mathrm{PR} - \mathrm{Q}^2$ est le hessien de $\mathrm{H}_x + u'\mathrm{X}$ et l'on sait qu'en général le hessien de $a\mathrm{X} + b\mathrm{H}_x$ est égal à

$$\left(\tfrac{1}{4}ab\mathrm{S} + \tfrac{1}{4}b^2\mathrm{T}\right)\mathrm{X} + \left(a^2 - \tfrac{1}{12}b^2\mathrm{S}\right)\mathrm{H}_x$$

(*voir* Hermite, *loc. cit.*, p. 33-35); donc

$$\mathrm{PR} - \mathrm{Q}^2 = \left(\tfrac{1}{4}\mathrm{S}u' + \tfrac{1}{4}\mathrm{T}\right)\mathrm{X} + \left(u'^2 - \tfrac{1}{12}\mathrm{S}\right)\mathrm{H}_x.$$

Mais $H_x + u'X$ est un carré : donc le hessien ne s'en distingue que par un facteur constant et

$$PR - Q^2 = (u'^2 - \tfrac{1}{12}S)(H_x + u'X).$$

Il vient donc

$$\Delta = (\tfrac{1}{12}S - u'^2 - C)(H_x + u'X).$$

On voit par là que l'expression $\xi$ n'est un carré parfait que pour la seule valeur

$$C = \tfrac{1}{12}S - u'^2,$$

et l'on doit avoir

$$-\alpha u'^2 + \beta u' + \gamma + \tfrac{1}{4}\alpha S = -u'^2 + \tfrac{1}{12}S,$$

donc

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = -\tfrac{1}{6}S,$$
$$\lambda' = 2u'^2 - \tfrac{1}{6}S.$$

13. Voici un moyen plus direct pour déterminer $\lambda'$. Écrivons $\lambda'$ au lieu de C, en sorte que

$$\psi' = (P + \lambda')y^2 + 2(Q - \lambda' x)y + R + \lambda' x^2,$$
$$\Delta = (\tfrac{1}{12}S - u'^2 - \lambda')\varphi_x'^2.$$

Mais nous savons que $\psi' = \varphi'_x \varphi'_y$ : donc nécessairement

$$P + \lambda' = \alpha\varphi'_x, \qquad Q - \lambda' x = \beta\varphi'_x, \qquad R + \lambda' x^2 = \gamma\varphi'_x,$$

d'où

$$\varphi'_y = \alpha y^2 + 2\beta y + \gamma,$$
$$\Delta = (\beta^2 - \alpha\gamma)\varphi_x'^2.$$

La comparaison des deux valeurs de $\Delta$ donne

$$\tfrac{1}{12}S - u'^2 - \lambda' = \beta^2 - \alpha\gamma ;$$

mais on sait que

$$\beta^2 - \alpha\gamma = -(u' - u'')(u' - u''') = -3u'^2 + \tfrac{1}{4}S \quad (^1),$$

ce qui fournit de nouveau la valeur de $\lambda'$.

---

(1) Cette valeur de l'invariant de $\varphi'_x$ se trouve sous une forme légèrement différente dans le Mémoire de M. Hermite; *voir*, p. 13, la valeur de $\Delta$ et, p. 15, la relation entre $\varphi$ et $\psi$. (*Voir* Clebsch, *Binäre Formen*, p. 153.)

14. Voici donc le résultat final auquel nous arrivons :

*Les intégrales linéaires de l'équation différentielle*

$$\frac{dx^2}{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}=\frac{dy^2}{a_0y^4+4a_1y^3+6a_2y^2+4a_3y+a_4}$$

*sont d'abord* $x-y=0$, *et les trois autres s'obtiennent en posant*

$$h+uf+(\tfrac{1}{12}S-u^2)(x-y)^2=0,$$

*où il faut déterminer u par l'équation cubique*

$$4u^3-Su-T=0.$$

*Sauf un facteur constant, le premier membre est alors un carré exact, et la relation entre x et y se réduit donc à cette forme*

$$p+q(x+y)+rxy=0.$$

On peut envisager ce résultat sous un autre point de vue. Quelle est, en effet, l'intégrale générale de l'équation différentielle (12). Cette intégrale a été obtenue déjà par Lagrange (*Œuvres*, t. II, p. 18); mais M. Cayley l'a mise sous cette forme élégante [1]

$$(13)\qquad h+Cf+(\tfrac{1}{12}S-C^2)(x-y)^2=0,$$

C étant la constante arbitraire.

Cette expression se déduit de celle que nous venons d'écrire en remplaçant $u$ par C. En général, le premier membre n'est pas un carré parfait : ainsi à une valeur donnée de $x$ répondent deux valeurs de $y$, l'intégrale n'est pas linéaire. Mais, si l'on pose $C=u', u'', u'''$, on trouve trois intégrales linéaires; la quatrième, $x-y=0$, répond à $C=\infty$.

15. En partant de cette intégrale générale, on aurait pu trouver notre détermination des intégrales linéaires d'une manière beaucoup plus simple. En effet, cette intégrale générale peut s'écrire

$$(14)\qquad \begin{cases} y^2(\mathfrak{a}x^2+2\mathfrak{h}x+\mathfrak{g}) \\ +2y(\mathfrak{h}x^2+2\mathfrak{b}x+\mathfrak{f}) \\ +(\mathfrak{g}x^2+2\mathfrak{f}x+\mathfrak{c})=0, \end{cases}$$

(1) *Voir aussi* LAGUERRE, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. I, p. 35.

où

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= a_0 a_2 - a_1^2 + C a_0,\\
\mathfrak{b} &= \tfrac{1}{6}(a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2^2) + C a_2 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{12} S - C^2),\\
\mathfrak{c} &= a_2 a_4 - a_3^2 + C a_4,\\
\mathfrak{f} &= \tfrac{1}{2}(a_1 a_4 - a_2 a_3) + C a_3,\\
\mathfrak{g} &= \tfrac{1}{6}(a_0 a_4 + 2 a_1 a_3 - 3 a_2^2) + C a_2 + \tfrac{1}{12} S - C^2,\\
\mathfrak{h} &= \tfrac{1}{2}(a_0 a_3 - a_1 a_2) + C a_1.
\end{aligned}$$

C'est une relation doublement quadratique et symétrique en $x$ et $y$, que l'on peut écrire sous les deux formes

$$o = A_x y^2 + 2 B_x y + C_x = A_y x^2 + 2 B_y x + C_y.$$

Euler déjà a observé qu'on en tire

$$\frac{dx^2}{B_x^2 - A_x C_x} = \frac{dy^2}{B_y^2 - A_y C_y};$$

mais, comme notre relation est l'intégrale générale de $\frac{dx^2}{X} = \frac{dy^2}{Y}$, on doit avoir

$$B_x^2 - A_x C_x = \Theta X$$

et de même

$$B_y^2 - A_y C_y = \Theta Y.$$

C'est ce qu'on vérifie facilement, et la valeur de $\Theta$ est

$$\frac{\mathfrak{h}^2 - \mathfrak{a}\mathfrak{g}}{a_0} = \Theta = C^2 - \tfrac{1}{4} S C - \tfrac{1}{4} T.$$

On a les relations identiques

$$\begin{aligned}
a_0 \Theta &= \mathfrak{h}^2 - \mathfrak{a}\mathfrak{g},\\
4 a_1 \Theta &= 4\mathfrak{b}\mathfrak{h} - 2\mathfrak{a}\mathfrak{f} - 2\mathfrak{g}\mathfrak{h},\\
6 a_2 \Theta &= 4\mathfrak{b}^2 - 2\mathfrak{h}\mathfrak{f} - \mathfrak{a}\mathfrak{c} - \mathfrak{g}^2,\\
4 a_3 \Theta &= 4\mathfrak{b}\mathfrak{f} - 2\mathfrak{c}\mathfrak{h} - 2\mathfrak{f}\mathfrak{g},\\
a_4 \Theta &= \mathfrak{f}^2 - \mathfrak{c}\mathfrak{g};
\end{aligned}$$

d'où l'on tire facilement cette conclusion que, pour $\Theta = o$,

$$A_x y^2 + 2 B_x y + C_x$$

est un carré parfait, et l'intégrale générale se réduit alors à une intégrale

linéaire qu'on peut écrire ainsi

$$\mathfrak{f} + \mathfrak{g}(x + y) + \mathfrak{h}xy = 0.$$

**16.** On a retrouvé ainsi, d'une manière très simple, le résultat de tout à l'heure; mais, si cette méthode est simple, elle est, par contre, moins générale que notre première méthode; car on ne saurait l'appliquer dans le cas général, l'intégrale générale de

$$(15)\qquad \frac{dx^2}{a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4} = \frac{dy^2}{b_0y^4 + 4b_1y^3 + 6b_2y^2 + 4b_3y + b_4}$$

n'étant pas connue sous une forme analogue à (13). Cependant il y a un second cas qu'on peut traiter ici en s'appuyant sur une remarque de M. Cayley.

Désignons par $\mathfrak{M}$ le premier membre de la formule (13) et remarquons que $\mathfrak{M}$ est aussi quadratique en C. En considérant C comme variable aussi, on aura

$$\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}dx + \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}dy + \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial C}dC = 0$$

et, d'après ce que nous avons vu,

$$\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x} = \pm\sqrt{4\Theta Y},$$

$$\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y} = \pm\sqrt{4\Theta X},$$

et, comme l'a remarqué M. Cayley,

$$\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial C} = \pm\sqrt{XY};$$

donc

$$\pm\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}} \pm \frac{dC}{\sqrt{4\Theta}} = 0.$$

En considérant donc C comme variable, $y$ comme une constante arbitraire, la relation (13) ou (14) est l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm\frac{dC}{\sqrt{4C^3 - SC - T}},$$

et, pour avoir les intégrales linéaires de cette équation, il suffit de résoudre l'équation Y = 0 ou, ce qui est la même chose, l'équation X = 0. Ce résultat

était à prévoir, car la connaissance des racines de $X = 0$ entraîne celle de l'équation $4C^3 - SC - T = 0$. En déterminant $y$ par l'équation $Y = 0$, $\mathfrak{M}$ deviendra un carré parfait.

17. Revenons maintenant au cas général, la détermination des intégrales linéaires de (15). D'après l'examen des cas particuliers que nous venons de faire, il est à prévoir qu'il doit exister une liaison intime entre cette détermination et l'intégration générale de cette équation; mais on ne connaît pas cette intégrale générale sous une forme analogue à (14) et il nous paraît assez difficile de l'obtenir sous cette forme.

Au contraire, la méthode inverse se présente ici.

Ayant obtenu la détermination des intégrales linéaires, si nous faisons dépendre cette solution directement d'une équation du quatrième degré, n'obtiendrons-nous pas en même temps l'intégrale générale sous une forme analogue à (14)?

C'est là une question qu'il nous reste à traiter.

Il faut le remarquer, on peut faire dépendre la détermination des intégrales linéaires d'une équation biquadratique, mais cela est possible d'une infinité de manières. Parmi les équations biquadratiques desquelles dépend ainsi la solution de notre problème, existe-t-il une classe particulièrement simple?

Ce sont là les questions qui se présentent : les diverses équations biquadratiques sont liées par des transformations de *Tschirnhausen*.

tain nombre d'autres variables; nous aurons

$$(8)\qquad \frac{\partial}{\partial T}[E(U-TS)] = E\frac{\partial U}{\partial T} - ET\frac{\partial S}{\partial T} - ES.$$

Supposons qu'il s'agisse d'un système primitivement en état d'équilibre, la modification infiniment petite considérée sera réversible; elle mettra en jeu une quantité de chaleur $\delta Q$, et le principe de Carnot-Clausius donnera [égalité (2)]

$$\delta S = -\frac{\delta Q}{T},$$

tandis que le principe de l'équivalence donnera [égalité (1)]

$$\delta Q = -\delta U + A\,\delta\mathcal{C}_e.$$

L'égalité (8) deviendra donc

$$\frac{\partial}{\partial T}[E(U-TS)] = -ES - \delta\mathcal{C}_e,$$

$\delta\mathcal{C}_e$ étant le travail accompli par les forces extérieures qui sollicitent le système lorsque la température varie de $\delta T$, les autres variables qui définissent le système conservant leur valeur.

Si, en particulier, ces variables sont choisies de telle sorte qu'aucun travail externe ne puisse être effectué dans le système si elles ne changent de valeur, on aura

$$\delta\mathcal{C}_e = 0$$

et

$$(9)\qquad \frac{\partial}{\partial T}[E(U-TS)] = -ES,$$

*égalité applicable à tous les systèmes pris dans un état d'équilibre.* M. Massieu a, le premier, signalé l'importance de cette égalité.

Faisons-en une application au cas qui nous occupe.

Supposons qu'un système, primitivement en équilibre, subisse un déplacement infiniment petit de ses diverses parties. Nous aurons

$$\delta S = -\frac{\partial}{\partial T}\delta(U-TS).$$

Mais $\delta(U-TS)$ peut, dans ce cas, être remplacé par la variation que subit le potentiel des actions mécaniques internes du système. Si ces actions mécaniques sont indépendantes de la température, il en sera de même de leur

potentiel, et l'on aura, par conséquent,

$$\delta S = 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\delta \mathfrak{S} = 0.$$

Ainsi, *lorsque les actions mécaniques que diverses parties d'un système exercent les unes sur les autres ne subissent aucune variation pendant un échauffement du système qui laisse invariable le volume, la forme et la position de ses diverses parties, un déplacement sans changement d'état des diverses parties de ce système primitivement en équilibre ne fait pas varier l'entropie du système; il n'entraîne aucun travail compensé.*

*Corollaire III.* — Dans une modification isothermique quelconque, on a

$$\begin{aligned} \delta\tau &= -\delta E(U - TS) + \delta\mathfrak{C}_e \\ &= -E\,\delta U + ET\,\delta S + \delta\mathfrak{C}_e. \end{aligned}$$

Dans les conditions moyennant lesquelles le théorème précédent est énoncé, on a

$$\begin{aligned} \delta\tau &= \delta\mathfrak{C}_i + \delta\mathfrak{C}_e, \\ \delta S &= 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$\delta\mathfrak{C}_i = -\delta(EU),$$

ce qui peut s'énoncer ainsi :

*Dans les conditions précédentes, le travail exercé par les actions mécaniques internes est égal à la variation changée de signe du produit de l'équivalent mécanique de la chaleur par l'énergie interne du système.*

Ces corollaires si simples jouent un rôle important dans les rapprochements que l'on peut tenter de faire entre la Mécanique rationnelle et la Thermodynamique.

Les modifications qu'envisage la Mécanique rationnelle consistent exclusivement en déplacements, sans changement d'état, des diverses parties d'un système; aussitôt que le déplacement est accompagné d'un changement d'état, la Mécanique rationnelle ne suffit plus à l'étudier. Dès lors les deux premiers corollaires énoncés ci-dessus nous montrent que les travaux étudiés en Mécanique rationnelle se rangent toujours dans la catégorie du travail non compensé; que les modifications auxquelles elle s'applique n'en-

gendrent jamais aucun travail compensé. Par conséquent, c'est l'étude du travail non compensé qui doit fournir en Thermodynamique des propositions analogues à celles dont la Mécanique fait usage; il serait vain et illusoire de chercher dans les exemples que nous fournit la Mécanique une quantité analogue au travail compensé.

Quant au troisième corollaire, il nous montre que l'on peut, tant que l'on n'étudie que des déplacements sans changement d'état, confondre le produit de l'énergie interne par l'équivalent mécanique de la chaleur avec le potentiel des actions intérieures du système; que l'on peut, par exemple, se servir de l'énergie interne comme d'un potentiel pour déterminer les états d'équilibre du système; mais il faut bien se garder d'étendre cette manière d'opérer lorsqu'on passe des déplacements sans changement d'état aux changements d'état accompagnés ou non de déplacements; en d'autres termes, lorsqu'on passe du domaine de la Mécanique rationnelle au domaine propre de la Thermodynamique; c'est alors le potentiel thermodynamique interne, et non l'équivalent mécanique de l'énergie interne, qui joue le même rôle que le potentiel des actions mécaniques internes en Thermodynamique. C'est faute d'avoir fait cette remarque que l'on a été conduit à deux lois inexactes qui ont joué un grand rôle en Physique et que les travaux récents de nombreux savants, en particulier de M. J.-W. Gibbs et de M. H. von Helmholtz, sont parvenus à grand'peine à rectifier. Ces lois sont, en Thermochimie, le principe du travail maximum; en Électricité, la loi de la proportionnalité entre la force électromotrice d'une pile et la quantité de chaleur mise en jeu par la réaction dont cette pile est le siège.

4. La proposition que nous venons de développer met donc en évidence les relations qui unissent la Mécanique à la Thermodynamique. Ces relations deviendront encore plus nettes par la remarque suivante :

Dans la démonstration du théorème précédent, nous avons fait appel au principe des vitesses virtuelles. Il est aisé de montrer qu'inversement, à l'aide de ce théorème, on peut déduire le principe des vitesses virtuelles des principes fondamentaux de la Thermodynamique.

D'après ces derniers principes, un système est assurément en équilibre stable si, pour toute modification isothermique virtuelle de ce système, le travail non compensé, c'est-à-dire la quantité

$$-E\,\delta(U - TS) + \delta\mathcal{E}_e,$$

est nulle ou négative.

Supposons-nous placé dans le seul cas qu'étudie la Mécanique rationnelle, c'est-à-dire dans le cas où les diverses parties du système ne peuvent éprouver que déplacements sans changement d'état. D'après le corollaire I, la proposition précédente pourra s'énoncer :

*L'équilibre d'un système dont les diverses parties sont susceptibles de se déplacer, mais non d'éprouver des changements d'état, est assuré si le travail effectué dans tout déplacement virtuel de ce système par toutes les forces qui agissent sur lui est nul ou négatif.*

Supposons que les forces extérieures qui agissent sur le système admettent un potentiel W; l'équilibre stable du système sera assuré si le potentiel thermodynamique

$$\Omega = E(U - TS) + W$$

est minimum à la température considérée.

Supposons que les diverses parties du système ne puissent éprouver que des déplacements sans changement d'état; dans ces conditions, $E(U-TS)$ ne diffère que par une constante du potentiel des actions mécaniques internes; $\Omega$ ne diffère que par une constante du potentiel de toutes les forces qui agissent sur le système, et l'on a cette proposition :

*L'équilibre stable d'un système soumis à des forces extérieures qui admettent un potentiel est assuré lorsque le potentiel total des forces, tant intérieures qu'extérieures, est minimum.*

Cette dernière proposition n'est autre chose que le critérium de stabilité bien connu dont on doit l'invention à Lagrange et la démonstration à Lejeune-Dirichlet. La première rappelle l'énoncé du principe des vitesses virtuelles tel que Gauss l'a formulé le premier d'une manière complète; mais elle présente avec cet énoncé une légère différence sur laquelle il nous est nécessaire d'insister.

En Mécanique rationnelle, le principe des vitesses virtuelles se présente comme une condition d'équilibre *nécessaire* et *suffisante*. Déduit, au contraire, de la Thermodynamique, ce principe se présente comme une condition *suffisante*, mais non *nécessaire*, de l'équilibre. Cette différence tient à la nature même du principe de Carnot, sur lequel est fondée la Thermodynamique. En Mécanique, tout système pour lequel les conditions d'équilibre déduites du principe des vitesses virtuelles ne sont pas vérifiées est

censé se mettre en mouvement. En Thermodynamique, au contraire, on sait bien qu'un système ne saurait éprouver de changement d'état contraire au principe de Carnot-Clausius; que si, par conséquent, toute modification virtuelle du système contredit à ce principe, le système sera forcément en équilibre; mais, lorsqu'un système peut éprouver une modification virtuelle compatible avec ce principe, on ignore si réellement il éprouvera ou non cette modification.

J'ajouterai que le principe des vitesses virtuelles, présenté par la Thermodynamique comme condition suffisante, mais non nécessaire, de l'équilibre est toujours conforme à l'expérience, tandis que l'expérience nous présente chaque jour des cas d'équilibre contraires au principe des vitesses virtuelles tel qu'on l'admet en Mécanique rationnelle; on dit alors qu'il y a *frottement*, et le principe des vitesses virtuelles suppose un système soumis à des liaisons dépourvues de frottement.

Tout ce que nous venons de dire montre assez l'importance des propositions énoncées dans le présent paragraphe; ces propositions ont déjà servi de base à toutes les applications de la Thermodynamique que nous avons faites aux phénomènes électriques. Avant d'en faire le point de départ de nos recherches sur le magnétisme, nous avons cru devoir les soumettre à un rigoureux examen.

## § II. — Potentiel et fonction potentielle magnétiques.

5. Les travaux de Gilbert et de Coulomb ont conduit à regarder chaque élément de volume d'un aimant comme un *élément magnétique*. Soit $dv$ le volume d'un semblable élément; son état magnétique est défini par une certaine grandeur, essentiellement positive, $\mathfrak{M}\,dv$, que l'on nomme son *moment magnétique*, et par la direction d'une certaine demi-droite MM', que l'on nomme son *axe magnétique*. $\mathfrak{M}$ se nomme l'*intensité de l'aimantation* en un point de l'élément $dv$; c'est, en général, une quantité finie. Si, sur l'axe magnétique, dans la direction MM' de cet axe, on porte une longueur égale à $\mathfrak{M}$, on obtient une grandeur géométrique ayant pour composantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, suivant trois axes de coordonnées rectangulaires $Ox$, $Oy$, $Oz$. La connaissance de ces trois quantités $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, que l'on nomme les *composantes de l'aimantation*, est nécessaire et suffisante pour déterminer l'état magnétique de l'élément $dv$.

Deux aimants A, $A_1$, de dimensions comparables à ceux que l'on peut

étudier expérimentalement, placés à une distance comparable à celles auxquelles les mesures peuvent être effectuées, exercent l'un sur l'autre des actions mécaniques; les expériences de Coulomb et de Gauss ont précisé la loi de ces actions; cette loi peut être énoncée de la manière suivante :

Soient $dv$ un élément du corps A et $dv_1$ un élément du corps $A_1$.

Sur l'axe magnétique MM' de l'élément $dv$ et à l'intérieur ou au voisinage immédiat de cet élément, prenons deux points infiniment voisins M et M', séparés par une distance $dl$. Au point M', plaçons une masse fictive $\mu = \frac{\mathfrak{M}\, dv}{dl}$ et au point M une masse fictive égale à $-\mu$. De même, sur l'axe magnétique $M_1M'_1$ de l'élément $dv_1$, prenons deux points infiniment voisins $M_1$ et $M'_1$, séparés par une distance $dl_1$; au point $M_1$, plaçons une masse fictive $\mu_1 = \frac{\mathfrak{M}_1\, dv_1}{dl_1}$ et au point $M_1$ une masse fictive égale à $-\mu_1$. Les deux corps A et $A_1$ exercent l'un sur l'autre les mêmes actions que si toute masse fictive $m$ du corps A repoussait toute masse fictive $m_1$ du corps $A_1$ avec une force F dirigée suivant la droite qui joint les deux masses et ayant pour valeur

$$F = h\frac{mm_1}{r^2},$$

$h$ étant une constante positive et $r$ la distance qui sépare les masses $m$ et $m_1$.

Il résulte de là que les actions mutuelles des deux corps A et $A_1$ admettent un potentiel et que ce potentiel a pour expression

$$h\int_A\int_{A_1}\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{dl\,dl_1}\,dv\,dv_1,$$

$r$ étant la distance d'un point de l'élément $dv$ à un point de l'élément $dv_1$, $dl$ et $dl_1$ étant, comme nous l'avons supposé dans ce qui précède, deux longueurs infiniment petites comptées respectivement sur les axes magnétiques des éléments, l'une des sommations s'étendant au volume entier du corps A, l'autre au volume du corps $A_1$.

L'expérience n'a rien appris jusqu'ici sur la loi qui règle les actions de deux aimants extrêmement petits, rapprochés jusqu'au contact. Rien ne prouve donc *a priori* que l'on puisse appliquer cette loi aux actions mutuelles des diverses particules contiguës d'un même aimant. Nous allons

voir au contraire qu'une semblable extension serait absurde. Il nous suffira pour cela de transformer par un calcul d'identité l'expression

$$\mathcal{M}\mathcal{M}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial l \, \partial l_1} dv \, dv_1.$$

Soient $x, y, z$ les coordonnées d'un point du volume $dv$ et $x_1, y_1, z_1$ les coordonnées d'un point du volume $dv_1$; nous aurons

$$dv = dx \, dy \, dz,$$
$$dv_1 = dx_1 \, dy_1 \, dz_1;$$

nous aurons ensuite

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial l \, \partial l_1} = {} & \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \, \partial x_1} \frac{dx}{dl} \frac{dx_1}{dl_1} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \, \partial y_1} \frac{dx}{dl} \frac{dy_1}{dl_1} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \, \partial z_1} \frac{dx}{dl} \frac{dz_1}{dl_1} \\
& + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \, \partial x_1} \frac{dy}{dl} \frac{dx_1}{dl_1} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \, \partial y_1} \frac{dy}{dl} \frac{dy_1}{dl_1} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \, \partial z_1} \frac{dy}{dl} \frac{dz_1}{dl_1} \\
& + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \, \partial x_1} \frac{dz}{dl} \frac{dx_1}{dl_1} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \, \partial y_1} \frac{dz}{dl} \frac{dy_1}{dl_1} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \, \partial z_1} \frac{dz}{dl} \frac{dz_1}{dl_1};
\end{aligned}$$

nous aurons enfin

$$\frac{dx}{dl} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{M}}, \qquad \frac{dy}{dl} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{M}}, \qquad \frac{dz}{dl} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{M}},$$
$$\frac{dx_1}{dl_1} = \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{M}_1}, \qquad \frac{dy_1}{dl_1} = \frac{\mathcal{B}_1}{\mathcal{M}_1}, \qquad \frac{dz_1}{dl_1} = \frac{\mathcal{C}_1}{\mathcal{M}_1}.$$

De toutes ces égalités, il résulte que l'on a

$$\begin{aligned}
(10) \quad \mathcal{M}\mathcal{M}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial l \, \partial l_1} dv \, dv_1 = {} & \mathcal{A}\left(\mathcal{A}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \, \partial x_1} + \mathcal{B}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \, \partial y_1} + \mathcal{C}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \, \partial z_1}\right) dx \, dy \, dz \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1 \\
& + \mathcal{B}\left(\mathcal{A}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \, \partial x_1} + \mathcal{B}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \, \partial y_1} + \mathcal{C}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \, \partial z_1}\right) dx \, dy \, dz \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1 \\
& + \mathcal{C}\left(\mathcal{A}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \, \partial x_1} + \mathcal{B}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \, \partial y_1} + \mathcal{C}_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z \, \partial z_1}\right) dx \, dy \, dz \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1
\end{aligned}$$

Dès lors, si la loi précédente demeurait exacte, même pour les particules contiguës d'un aimant, les actions mutuelles des diverses particules d'un aimant devraient admettre pour potentiel la quantité

$$\frac{h}{2}\int dv\Bigg[\mathcal{A}\int\left(\mathcal{A}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial x'}+\mathcal{B}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y'}+\mathcal{C}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z'}\right)dv'$$
$$+\mathcal{B}\int\left(\mathcal{A}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial x'}+\mathcal{B}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial y'}+\mathcal{C}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z'}\right)dv'$$
$$+\mathcal{C}\int\left(\mathcal{A}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x'}+\mathcal{B}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial y'}+\mathcal{C}'\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial z'}\right)dv'\Bigg],$$

toutes les intégrations s'étendant au volume entier de l'aimant. Or, nous avons vu, dans l'*Étude historique sur l'aimantation par influence* que nous avons publiée (§ I, n° 5), que les trois intégrales triples qui servent ici de coefficients à $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ n'avaient aucun sens; il en est donc de même de l'expression précédente, et l'extension proposée de la loi expérimentale des actions magnétiques serait absurde.

Mais il est aisé de transformer l'énoncé de cette loi en un autre énoncé qui puisse s'étendre aux actions mutuelles des particules d'un même aimant.

D'après l'égalité (10), si nous désignons par $\mathcal{V}$ l'intégrale

$$\int\left(\mathcal{A}_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}+\mathcal{B}_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}+\mathcal{C}_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)dv_1,$$

étendue à l'aimant $A_1$ tout entier, $r$ étant la distance d'un point de l'élément $dx_1\,dy_1\,dz_1$ à un point $(x, y, z)$ du corps A, le potentiel des actions mutuelles de l'aimant A sur l'aimant $A_1$ aura ponr valeur.

$$h\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)dv.$$

Cette dernière expression peut se généraliser et s'appliquer aux actions mutuelles des particules d'un même aimant, moyennant l'existence de la quantité

$$\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z},$$

DE

# L'AIMANTATION PAR INFLUENCE,

PAR M. P. DUHEM,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille.

## INTRODUCTION.

Les équations sur lesquelles repose la théorie de l'aimantation par influence des corps amorphes ou cristallisés ont été données par Poisson; mais la voie suivie par Poisson pour les établir présente des difficultés de toute sorte : complication des hypothèses fondamentales, manque de rigueur des déductions mathématiques, opposition avec les faits de quelques-unes des conséquences expérimentales.

Les physiciens qui, après Poisson, se sont occupés de cette théorie, et notamment sir W. Thomson et G. Kirchhoff, ont cherché à éliminer ces difficultés; mais ils n'y sont parvenus qu'en admettant d'emblée les équations de l'équilibre magnétique comme des hypothèses primordiales, sans les rattacher d'aucune manière à des théories plus générales ou à des lois directement accessibles à l'expérience.

Cette absence de raisons à l'appui des équations fondamentales de l'équilibre magnétique est d'autant plus regrettable que des obstacles de toute sorte rendent fort difficile la vérification expérimentale des conséquences peu nombreuses qui en ont été déduites jusqu'ici.

Dans ces conditions, nous avons cru utile de reprendre l'établissement de ces équations en nous appuyant seulement sur les lois incontestées qui règlent les actions mutuelles des aimants et sur les principes non moins incontestés de la Thermodynamique. Nous avons été ainsi conduit, pour les corps isotropes, à des conditions d'équilibre identiques à celles que

G. Kirchhoff avait imaginées; dès lors, comme les équations de G. Kirchhoff n'avaient fait l'objet presque d'aucune étude, nous avons examiné quelques-unes des conséquences de ces équations, examen qui nous a amené à rectifier quelques propositions introduites en Physique sans démonstration suffisante.

Pour les corps non isotropes, nous avons été conduit à des conditions d'équilibre d'une forme nouvelle et plus compliquée que celle qu'on pouvait attendre.

Notre travail n'aura assurément pas éliminé toutes les difficultés que présente la théorie de l'aimantation par influence; mais nous espérons au moins qu'il aura contribué à éclaircir quelques-uns des points obscurs de cette théorie.

# CHAPITRE I.

## POTENTIEL THERMODYNAMIQUE D'UN SYSTÈME QUI RENFERME DES AIMANTS.

---

### § I. — Quelques propositions de Thermodynamique.

1. La théorie nouvelle de l'aimantation par influence, que le présent Mémoire aura pour but de développer, repose sur l'emploi des principes de la Thermodynamique. Qu'il nous soit permis de rappeler ces principes sous la forme que nous aurons à employer dans la suite.

Lorsqu'un système subit une transformation élémentaire, il dégage une quantité de chaleur $dQ$; les forces extérieures auxquelles il est soumis effectuent un travail infiniment petit $d\mathfrak{T}_e$, et l'on a

$$dQ = -dU + A\, d\mathfrak{T}_e, \tag{1}$$

A étant l'équivalent calorifique du travail et U une fonction de l'état du système à laquelle on donne le nom d'*énergie interne*.

Si T désigne la température absolue que possèdent tous les points du système au moment où cette modification se produit, on a aussi

$$\frac{dQ}{T} = -dS + A\, dN, \tag{2}$$

S étant une fonction de l'état du système à laquelle on donne le nom d'*entropie*, et $dN$ une quantité infiniment petite, toujours positive et nulle seulement lorsque la transformation considérée est réversible, quantité à laquelle on donne le nom de *transformation non compensée*.

Ces deux propositions si simples sont la forme donnée au principe de l'équivalence de la chaleur et du travail et au principe de Carnot par M. Clausius.

M. J.-W. Gibbs en a déduit une conséquence presque immédiate, dont la fécondité semble s'accroître chaque jour.

Posons, lorsque T demeure constant,

$$dN = \frac{d\tau}{T},$$

et donnons à $d\tau$ le nom de *travail non compensé accompli dans une transformation isothermique;* nous aurons de ce travail cette remarquable expression

$$(3) \qquad d\tau = -\mathrm{E}\,d(\mathrm{U}-\mathrm{TS}) + d\mathcal{E}_e,$$

E étant l'équivalent mécanique de la chaleur.

Supposons maintenant que les forces extérieures admettent un potentiel W, de telle sorte que l'on ait

$$d\mathcal{E}_e = -d\mathrm{W},$$

et posons

$$(4) \qquad \Omega = \mathrm{E}(\mathrm{U}-\mathrm{TS}) + \mathrm{W};$$

l'égalité (3) deviendra

$$d\tau = -d\Omega;$$

*le travail non compensé effectué durant une transformation isothermique est alors la variation changée de signe d'une fonction de l'état du système* **Ω**.

Nous donnerons à cette fonction **Ω** le nom de *potentiel thermodynamique* du système.

Moyennant ces conventions, la condition d'après laquelle $d\mathrm{N}$ doit toujours être positif peut s'énoncer ainsi :

*Pour qu'un système dont tous les points sont à la même température absolue soit en équilibre stable, il suffit que le potentiel thermodynamique de ce système ait la plus petite valeur qu'il peut prendre à la température considérée.*

Tels sont les principes sur lesquels reposent les raisonnements dont il sera fait usage au cours du présent travail.

L'étude de l'équilibre d'un système quelconque suppose, en premier lieu, la détermination de la forme du potentiel thermodynamique de ce système; nous aurons donc, en premier lieu, à déterminer la forme du potentiel thermodynamique d'un système qui renferme des aimants. Pour y parvenir, nous suivrons une voie analogue à celle qui, dans un autre travail, nous a permis d'obtenir le potentiel thermodynamique d'un système électrisé. Cette voie suppose l'emploi d'un lemme fondamental dont nous allons rappeler l'énoncé et la démonstration.

2. Imaginons un système décomposé en un nombre limité ou illimité de corps finis ou infiniment petits, susceptibles d'être déplacés les uns par rapport aux autres. Imaginons qu'à chacun de ces corps on ait invariablement lié un système d'axes de coordonnées rectangulaires. Pour connaître complètement l'état du système, il faudra connaître la position de l'origine de chacun de ces systèmes d'axes et l'orientation des axes. En général, il faut aussi connaître un certain nombre d'autres quantités : forme et volume de chacun des corps, état physique et chimique dans lequel il se trouve, température qu'il possède en ses divers points, etc. Lorsque les premières quantités varieront seules, les autres demeurant invariables, nous dirons que *l'on déplace les uns par rapport aux autres les divers corps du système sans changer leur état.*

A un semblable déplacement on peut appliquer les propositions établies en Mécanique rationnelle pour les déplacements d'un système de solides invariables.

Soient

E l'équivalent mécanique de la chaleur;
T la température absolue du système supposée la même en tous les points;
U son énergie interne;
S son entropie.

Dans un déplacement infiniment petit sans changement d'état, la quantité

$$E(U - TS),$$

que nous nommerons le *potentiel thermodynamique interne*, éprouve une variation

$$E\,\delta(U - TS).$$

En même temps, les actions mécaniques internes que les divers corps du système exercent les uns sur les autres effectuent un certain travail $\delta\mathfrak{T}_i$ et l'on a

$$\delta\mathfrak{T}_i = - E(U - TS), \tag{5}$$

égalité que l'on peut énoncer ainsi :

*Dans toute modification qui déplace les uns par rapport aux autres les divers corps qui constituent un système sans changer leur état, le travail effectué par les actions mécaniques internes du système est la*

*variation changée de signe d'un potentiel, et ce potentiel ne diffère du potentiel thermodynamique interne que d'une quantité qui peut bien dépendre de l'état des divers corps, mais qui ne dépend pas de leur position.*

La démonstration de cette proposition est extrêmement simple.

Imposons à chacun des corps du système la liaison de demeurer dans un état invariable et appliquons au système, devenu ainsi incapable d'éprouver aucune modification autre que les déplacements que nous avons en vue d'étudier :

1° Des forces égales et directement opposées aux forces extérieures qui agissent sur lui;

2° Des forces qui, dans tout déplacement du genre de ceux que nous considérons, effectuent un travail $\delta\mathfrak{T}'_i$ égal ou inférieur à

$$E\,\delta(U - TS),$$

de telle façon que l'on ait, pour tout déplacement de ce genre,

$$(6) \qquad E\,\delta(U - TS) - \delta\mathfrak{T}'_i \geqq 0.$$

Soit $\Upsilon$ l'énergie interne du système ainsi modifié; soit $\Sigma$ son entropie; soit $\delta\Theta$ le travail externe effectué dans un déplacement du genre de celui que nous considérons par les forces extérieures qui agissent maintenant sur le système. Dans un semblable déplacement, le travail non compensé effectué a pour valeur, d'après l'égalité (3),

$$(7) \qquad \delta\tau = -E\,\delta(\Upsilon - T\Sigma) + \delta\Theta.$$

Mais, par hypothèse, l'état du système a été maintenu le même avant et après l'addition des nouvelles forces; on a donc

$$\Upsilon = U,$$
$$\Sigma = S.$$

D'autre part, les forces extérieures qui agissent sur le système après l'addition des nouvelles forces se composent :

1° Des forces extérieures qui agissaient auparavant sur le système; dans la modification considérée, elles effectuent un travail $\delta\mathfrak{T}_e$;

2° Du premier groupe de forces ajoutées; dans la modification considérée, ces forces effectuent évidemment le travail $-\delta\mathfrak{T}_e$;

3° Du second groupe de forces ajoutées; dans la modification considérée, ces forces effectuent, par hypothèse, le travail $\delta\mathfrak{C}'_i$.

On a donc

$$\delta\Theta = \delta\mathfrak{C}_e - \delta\mathfrak{C}_e + \delta\mathfrak{C}'_i = \delta\mathfrak{C}'_i,$$

et l'égalité (7) devient

$$\delta\tau = - E\,\delta(U - TS) + \delta\mathfrak{C}'_i.$$

D'après l'inégalité (6), cette quantité est nulle ou négative; dès lors, d'après les propositions de Thermodynamique que nous rappelions au commencement de ce paragraphe, la modification correspondante, entraînant un travail non compensé nul ou négatif, ne peut se produire; le système, soumis aux actions mécaniques qui agissent réellement sur lui et à celles que nous y avons adjointes, ne peut subir aucun déplacement qui n'altère pas l'état de ses diverses parties; les liaisons qui lui interdisent toute modification autre que des déplacements de ce genre assurent l'équilibre du système.

Mais, grâce à ces liaisons par lesquelles chacun des corps qui constituent le système est supposé maintenu dans un état invariable, les propositions de la Mécanique rationnelle relatives aux systèmes formés de corps solides sont applicables au système précédent. On peut, en particulier, lui appliquer le principe des vitesses virtuelles.

D'après ce qui précède, le système est en équilibre sous l'action de quatre systèmes de forces :

1° Les forces mécaniques extérieures qui agissaient primitivement sur lui;

2° Les actions mécaniques intérieures que les divers corps qui le constituent exercent les uns sur les autres;

3° Des forces égales et directement opposées aux forces extérieures;

4° Des forces effectuant dans tout déplacement virtuel un travail $\delta\mathfrak{C}'_i$ égal ou inférieur à $E\,\delta(U - TS)$.

Le premier et le troisième système de forces se détruisent. On peut donc dire que le système est en équilibre sous l'action du second et du quatrième groupe de forces.

Mais, dans toute modification du système où ses diverses parties changent de position sans changer d'état, les forces du second groupe effectuent un travail virtuel $\delta\mathfrak{C}_i$; les forces du quatrième groupe effectuent un travail virtuel $\delta\mathfrak{C}'_i$; en vertu du principe des vitesses virtuelles, le système ne peut être

en équilibre sous l'action de ces deux groupes de forces si l'on n'a

$$\delta\mathfrak{C}_i + \delta\mathfrak{C}'_i \leqq 0.$$

Cela doit avoir lieu toutes les fois que $\delta\mathfrak{C}'_i$ vérifie l'inégalité (6). On doit donc avoir

$$\delta\mathfrak{C}_i \leqq -\mathrm{E}\,\delta(\mathrm{U}-\mathrm{TS}).$$

Si l'on suppose maintenant qu'à tout déplacement virtuel des diverses parties du système on puisse faire correspondre le déplacement inverse, on verra aisément que l'inégalité précédente se réduit à l'égalité (6) :

$$\delta\mathfrak{C}_i = -\mathrm{E}\,\delta(\mathrm{U}-\mathrm{TS}),$$

que nous nous proposions de démontrer.

3. Ce théorème fondamental entraîne quelques conséquences qui en dérivent immédiatement et que nous pouvons indiquer ici.

*Corollaire I.* — L'égalité (3)

$$\delta\tau = -\mathrm{E}\,\delta(\mathrm{U}-\mathrm{TS}) + \delta\mathfrak{C}_e$$

devient, en vertu de cette égalité (6),

$$\delta\tau = \delta\mathfrak{C}_i + \delta\mathfrak{C}_e,$$

ce qui peut s'énoncer ainsi :

*Lorsqu'un système subit un déplacement sans changement d'état de ses diverses parties, le travail non compensé produit dans ce système est égal au travail produit par les actions mécaniques, tant externes qu'internes, qui agissent sur les diverses parties du système.*

*Corollaire II.* — Lorsqu'un système dont tous les points sont à la même température subit une modification isothermique, l'entropie de ce système varie de $\delta\mathrm{S}$ et l'on donne à la quantité

$$\delta\tau = -\mathrm{ET}\,\delta\mathrm{S}$$

le nom de *travail compensé* accompli dans la modification considérée.

Considérons un système défini par sa température absolue et par un cer-

nous avons vu (*Étude historique*, § I, n° 5) que la fonction

$$\mathcal{W} = \int \left( \mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) dv',$$

dans laquelle l'intégration s'étend à l'aimant A tout entier et dans laquelle $r$ désigne la distance d'un point de l'élément $dx'\,dy'\,dz'$ de l'aimant A à un point $(x, y, z)$ du même aimant, est une fonction finie, continue et uniforme des coordonnées $(x, y, z)$ et qu'elle admet par rapport à ces coordonnées des dérivées partielles du premier ordre. Dès lors, rien ne nous empêche d'admettre, comme généralisation des faits d'expérience, que les actions mutuelles des diverses particules d'un aimant A admettent pour potentiel la quantité

$$\frac{h}{2} \left( \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} \right) dv.$$

Dans ce qui va suivre, nous admettrons cette hypothèse.

Désormais nous désignerons par la lettre $\mathcal{V}$ la somme des deux fonctions $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$, c'est-à-dire l'intégrale

$$\int \left( \mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) dv'$$

étendue à tous les aimants du système, $r$ étant la distance d'un point de l'élément $dx'\,dy'\,dz'$ à un point $(x, y, z)$ de l'espace. Nous nommerons cette fonction $\mathcal{V}$ la *fonction potentielle magnétique*.

Pourvu que la quantité

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}$$

existe et soit finie en tout point des aimants que renferme le système, la fonction $\mathcal{V}$ est, dans tout l'espace, une fonction finie, continue et uniforme de $x, y, z$ admettant des dérivées premières par rapport à ces variables. Si la quantité

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}$$

est en outre continue, ces dérivées premières sont continues, sauf à la surface de séparation d'un aimant et d'une substance non aimantée. Si $N_i$ et $N_e$

sont les normales vers l'intérieur ou l'extérieur à une telle surface, on a

$$(11) \qquad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e} = -4\pi[\mathcal{A} \cos(N_i, x) + \mathcal{B} \cos(N_i, y) + \mathcal{C} \cos(N_i, z)].$$

Si enfin la quantité

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}$$

admet, par rapport à $x$, $y$, $z$, des dérivées partielles du premier ordre, $\mathcal{V}$ admet, par rapport aux mêmes variables, des dérivées partielles du second ordre, et l'on a dans tout l'espace

$$(12) \qquad \Delta \mathcal{V} = -4\pi \left( \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \right),$$

égalité qui se réduit, lorsque le point $(x, y, z)$ est extérieur aux aimants, à

$$(13) \qquad \Delta \mathcal{V} = 0.$$

Les actions mécaniques internes d'un système d'aimants admettent alors pour potentiel la quantité $\mathfrak{F}$ définie par l'égalité

$$(14) \qquad \mathfrak{F} = \frac{h}{2} \int \left( \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right) dv,$$

l'intégration s'étendant à tous les aimants du système. $\mathfrak{F}$ est le *potentiel magnétique* du système.

Ce résultat, obtenu en généralisant la loi expérimentale de Coulomb et de Gauss, est l'hypothèse unique sur laquelle nous fonderons l'étude de l'aimantation par influence. Au moyen de cette hypothèse et du théorème développé au paragraphe précédent, nous allons, au paragraphe suivant, déterminer la forme du potentiel thermodynamique d'un système de corps aimantés.

## § III. — Potentiel thermodynamique des corps isotropes aimantés.

6. Considérons un système qui renferme des aimants et supposons que les seules actions mécaniques qui s'exercent dans l'intérieur de ce système soient les actions magnétiques, hypothèse qui ne serait pas vérifiée si le système renfermait soit des charges électriques en équilibre, soit des courants électriques constants ou variables.

D'après ce que nous venons de dire, les actions mécaniques internes de ce système admettent pour potentiel la quantité $\mathfrak{J}$ définie par l'égalité (14).

Nous nous proposons de déterminer la forme du potentiel thermodynamique interne du système. Ce potentiel thermodynamique interne est défini par l'égalité

$$\mathfrak{F} = E(\Upsilon - T\Sigma),$$

E étant l'équivalent mécanique de la chaleur;
$\Upsilon$ l'énergie interne du système;
$\Sigma$ son entropie;
T la température absolue commune à tous ses points.

D'après ce que nous avons vu au § I, ce potentiel thermodynamique interne ne diffère du potentiel des actions mécaniques intérieures au système que d'une quantité qui peut dépendre de l'état des divers éléments magnétiques, mais non de leur position, en sorte que, si l'on désigne par $\mathfrak{F}'$ une semblable quantité, on doit avoir

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{J} + \mathfrak{F}'. \tag{15}$$

C'est donc la quantité $\mathfrak{F}'$ qu'il s'agit pour nous de déterminer.

L'état de chacun des éléments du système dépend :

Du volume de l'élément;

De la forme de la surface qui le limite;

De l'orientation de l'axe magnétique par rapport à cette surface;

Si la substance n'est pas isotrope, de l'orientation de l'axe magnétique par rapport aux axes d'élasticité de la substance;

De l'intensité de l'aimantation en un point;

Enfin d'autres paramètres $\alpha$, $\beta$, ..., qui achèvent de déterminer l'état physique et chimique de la substance.

Telles sont les variables qui peuvent influer sur la valeur de $\mathfrak{F}'$.

Bornons-nous, pour le moment, à considérer le cas d'une substance isotrope : nous étudierons dans un Chapitre ultérieur les propriétés des corps cristallisés; cherchons la variation que subit la quantité $\mathfrak{F}'$ lorsque, dans un élément magnétique, on fait varier l'intensité d'aimantation et l'orientation de l'axe magnétique sans déplacer l'élément et sans faire varier ni son volume ni la forme de la surface qui le limite.

La variation que subit la quantité $\mathfrak{F}'$ par l'effet d'une modification donnée dépend seulement de l'état du système avant et après cette modification et

non de la voie suivie par le système pour passer de l'un de ces états à l'autre. Nous pouvons donc choisir cette voie arbitrairement.

1° Nous découperons dans le système l'élément $dv$, dont l'état doit varier; nous éloignerons à l'infini tous les autres éléments du système sans changer l'aimantation ou l'état d'aucun d'entre eux. Dans cette modification, qui constitue ce qu'au § I nous avons nommé un déplacement sans changement d'état, la quantité $\mathfrak{F}'$ ne subira aucune variation.

2° Dans l'élément ainsi isolé, nous ferons subir à l'intensité d'aimantation et à l'orientation de l'axe magnétique les variations infiniment petites que nous avons en vue. Dans cette modification, $\mathfrak{F}'$ variera de $\delta_1\mathfrak{F}'$.

3° Cette modification achevée, nous ramènerons de l'infini tous les éléments du système à leur position initiale sans changer l'état ou l'aimantation d'aucun d'entre eux. Dans ce nouveau déplacement sans changement d'état, $\mathfrak{F}'$ ne variera pas.

L'ensemble de ces trois modifications devant faire varier $\mathfrak{F}'$ de $\delta\mathfrak{F}'$, on a

$$\delta\mathfrak{F}' = \delta_1\mathfrak{F}'.$$

Il nous suffit donc d'étudier la variation de $\delta_1\mathfrak{F}'$.

Il est évident que cette variation est égale à la variation que subirait le potentiel thermodynamique d'un système formé par l'élément $dv$ seul, si cet élément subissait le changement considéré d'axe magnétique et d'aimantation sans changer de position, de forme ou d'état.

L'intensité de l'aimantation et l'orientation de l'axe magnétique sont connues lorsqu'on connaît les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de l'aimantation suivant trois axes rectangulaires invariablement liés à l'élément. Par conséquent, dans la modification précédente, on a

$$\delta_1\mathfrak{F}' = A\,\delta\mathcal{A} + B\,\delta\mathcal{B} + C\,\delta\mathcal{C},$$

A, B, C étant trois quantités qui peuvent dépendre :

1° De $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$;

2° Du volume $dv$ de l'élément;

3° De la forme de la surface qui le limite;

4° Des coefficients $\alpha$, $\beta$, ....

Quelle que soit la forme de la surface qui limite l'élément $dv$, quelle que soit l'orientation de l'axe magnétique par rapport à cette surface, quel que soit le volume de l'élément $dv$, nous pouvons le partager en une infinité de

cubes infiniment petits par rapport à cet élément, ayant un volume déterminé d'avance et dans lesquels l'axe magnétique ait une direction déterminée par rapport à la surface qui limite chacun d'eux. Une démonstration analogue à celle que nous venons de faire pour prouver que $\delta\mathcal{F}' = \delta_1\mathcal{F}'$ nous montrera que $\delta_1\mathcal{F}'$ est égal à la somme des quantités analogues obtenues, en supposant que, après avoir éloigné indéfiniment tous ces petits cubes les uns des autres, on fasse subir à chacun d'eux la même variation d'aimantation qu'à l'élément $dv$ tout entier.

Il est facile de conclure de là que les quantités A, B, C sont proportionnelles au volume de l'élément $dv$ et indépendantes de la forme de la surface qui le limite, en sorte que nous pourrons écrire

$$\delta\mathcal{F}' = \delta_1\mathcal{F}' = (A'\,\delta\mathcal{A} + B'\,\delta\mathcal{B} + C'\,\delta\mathcal{C})\,dv,$$

$A'$, $B'$, $C'$ dépendant uniquement des variables $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\alpha$, $\beta$, ....

Au lieu de prendre $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ comme variables indépendantes pour définir l'état d'aimantation de l'élément $dv$, nous pourrons aussi bien prendre pour variables indépendantes $\mathcal{M}$ et deux des quantités $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, les deux premières par exemple. Nous aurons alors

$$\delta\mathcal{F}' = \delta_1\mathcal{F}' = (m\,\delta\mathcal{M} + a\,\delta\mathcal{A} + b\,\delta\mathcal{B})\,dv,$$

$m$, $a$ et $b$ étant trois fonctions de $\mathcal{M}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\alpha$, $\beta$, ... seulement.

La forme de la surface qui limite l'élément $dv$ n'influant pas sur la valeur des quantités $m$, $a$ et $b$, on peut, pour les déterminer, donner à l'élément la forme d'une sphère. Cette hypothèse admise, envisageons les deux modifications équivalentes que voici :

Dans la première modification, on suppose qu'on laisse l'élément immobile, qu'on ne fasse point varier son intensité d'aimantation $\mathcal{M}$, non plus que les paramètres $\alpha$, $\beta$, ..., mais qu'on change l'orientation de son axe magnétique, de telle façon que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ varient de quantités quelconques $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$. Dans cette première modification, on a

$$\delta\mathcal{F}' = \delta_1\mathcal{F}' = (a\,\delta\mathcal{A} + b\,\delta\mathcal{B})\,dv.$$

Dans la seconde modification, on suppose qu'on laisse invariable l'intensité d'aimantation et les paramètres $\alpha$, $\beta$, ...; que l'axe magnétique demeure invariablement lié à l'élément, mais qu'on fasse tourner celui-ci autour de son centre de manière que l'axe magnétique subisse dans l'espace le

même changement d'orientation que dans la précédente modification. Cette seconde modification constitue un déplacement sans changement d'état, en sorte que l'on a, durant cette modification,

$$\delta\mathfrak{F} - \delta_1\mathfrak{F} = 0.$$

Or les deux modifications, amenant le système du même état initial au même état final, font subir à la quantité $\mathfrak{F}$ la même variation. On a donc, quels que soient $\delta x$ et $\delta\omega$,

[illegible]

c'est-à-dire

[illegible]

[illegible]

éléments qui le constituent, $\mathfrak{T}$ tend vers o; il en est de même de $\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ d'après l'égalité (16); $\mathfrak{F}$ tend donc vers $\mathfrak{F}''$.

D'autre part, si nous désignons par U l'énergie interne que posséderait le système si tous les éléments conservaient le même état physique défini par les paramètres $\alpha, \beta, \ldots$ et le même volume, mais cessaient d'être magnétiques; par S l'entropie que posséderait le système dans les mêmes conditions, il est évident que la limite vers laquelle tend la valeur de $\mathfrak{F}$ est E(U − TS).

On a donc

$$\mathfrak{F}'' = E(U - TS). \tag{18}$$

Cette égalité (18) achève de déterminer la forme du potentiel thermodynamique interne d'un système qui renferme des corps isotropes aimantés, car des égalités (15), (17) et (18), il résulte que l'on a pour un semblable système

$$\mathfrak{F} = E(U - TS) + \mathfrak{T} + \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv. \tag{19}$$

C'est de cette égalité que nous allons déduire les lois de l'induction magnétique des substances isotropes.



# CHAPITRE II.

## ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE MAGNÉTIQUE.

### § I. — Équations fondamentales de l'aimantation par influence.

1. Nous allons dans ce Chapitre chercher à déterminer la grandeur et la direction de l'aimantation en chaque point d'un corps *dénué de force coercitive* soumis à l'action d'*aimants permanents*. Commençons par définir ces deux mots.

Considérons un système renfermant un corps susceptible de s'aimanter et cherchons à quelles conditions le travail non compensé effectué dans une modification isothermique virtuelle quelconque de ce système sera nul ou négatif; parmi ces conditions, qui sont les conditions d'équilibre en Thermodynamique, nous en trouverons qui expriment la proposition suivante : l'aimantation a en chaque point du corps considéré une certaine direction et une certaine grandeur. Si, en chaque point de ce corps, l'aimantation a cette direction et cette grandeur, cette aimantation ne pourra subir aucune variation; l'équilibre magnétique sera absolument établi.

Mais, selon une remarque faite précédemment (Chap. I, § I, n° 11), il peut fort bien arriver que le système conserve un état invariable sans que les conditions d'équilibre prescrites par la Thermodynamique soient vérifiées; il peut arriver que l'aimantation du corps en question demeure invariable, bien que cette aimantation ne satisfasse point aux conditions dont il a été parlé.

Nous dirons qu'un corps est *parfaitement doux*, ou bien qu'il est dénué de force coercitive, si, en toute circonstance, l'aimantation en chacun des points de ce corps satisfait aux conditions d'équilibre indiquées par la Thermodynamique.

Au contraire, nous dirons qu'un aimant est *permanent* si l'aimantation en chaque point conserve une grandeur et une direction invariables en quelque circonstance que cet aimant se trouve placé.

Les aimants permanents et les corps parfaitement doux forment les deux limites extrêmes de la série des corps magnétiques. Il va sans dire que tous les corps magnétiques que nous présente la nature viennent se ranger entre

ces deux limites, sans jamais réaliser complètement ni l'une ni l'autre d'entre elles. Néanmoins, ces deux limites correspondent aux seuls cas que nous puissions étudier théoriquement : nous pouvons étudier les aimants permanents parce que leur état magnétique peut être censé donné arbitrairement, et les corps parfaitement doux parce que cet état est réglé par les propositions de la Thermodynamique.

2. Envisageons un système formé d'aimants permanents et de corps dénués de force coercitive.

En un point de l'un de ces derniers, l'aimantation a pour composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. On peut imaginer que, sans changer la position, le volume, la forme, l'état physique ou chimique des divers corps qui constituent le système, on fasse, au sein d'un élément $dv$, varier $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, de quantités infiniment petites arbitraires $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$. D'après la définition des corps parfaitement doux, il n'en doit résulter pour le système aucun travail non compensé.

Tous les corps du système demeurant invariables de volume, de forme et de position, les forces extérieures appliquées au système n'effectuent aucun travail. Le travail non compensé effectué se réduit alors à la variation changée de signe du potentiel thermodynamique interne.

Ce dernier est fourni par l'égalité (19) du Chapitre précédent. Il a pour valeur, en conservant les notations de ce Chapitre,

$$\mathfrak{F} = E(U - TS) + \Upsilon + \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv.$$

Cherchons la variation subie par cette quantité lorsque, au sein de l'élément $dv$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ varient respectivement de $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$, tous les autres paramètres qui fixent l'état du système demeurant invariables.

La quantité $E(U - TS)$ ne subit dans ces conditions aucune variation.

La quantité $\Upsilon$ subit une variation facile à calculer en se reportant à la définition de la fonction $\Upsilon$ donnée par l'égalité (14) du Chap. I. Il est aisé de voir que l'on a

$$\delta\Upsilon = h\left[\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\delta\mathcal{A} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\delta\mathcal{B} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\delta\mathcal{C}\right] dv,$$

$\mathcal{V}$ étant la valeur de la fonction potentielle magnétique en un point $(x, y, z)$ de l'élément $dv$.

Enfin on a

$$\delta \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv = \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}} \left[ \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \mathcal{A}} \delta \mathcal{A} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \mathcal{B}} \delta \mathcal{B} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \mathcal{C}} \delta \mathcal{C} \right] dv.$$

Mais l'égalité

$$\mathfrak{M}^2 = \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2$$

donne

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \mathcal{A}} = \frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{M}}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \mathcal{B}} = \frac{\mathcal{B}}{\mathfrak{M}}, \qquad \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial \mathcal{C}} = \frac{\mathcal{C}}{\mathfrak{M}},$$

en sorte que l'on peut écrire

$$\delta \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv = \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}} (\mathcal{A}\, \delta \mathcal{A} + \mathcal{B}\, \delta \mathcal{B} + \mathcal{C}\, \delta \mathcal{C})\, dv.$$

Tous ces calculs conduisent à l'égalité

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{F} = \Big\{ & \left[ h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}} \mathcal{A} \right] \delta \mathcal{A} \\ & + \left[ h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}} \mathcal{B} \right] \delta \mathcal{B} \\ & + \left[ h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} + \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}} \mathcal{C} \right] \delta \mathcal{C} \Big\} dv. \end{aligned}$$

Cette quantité doit être égale à o quelles que soient les variations $\delta \mathcal{A}$, $\delta \mathcal{B}$, $\delta \mathcal{C}$. Si donc on pose

$$(1) \qquad F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) = \frac{\mathfrak{M}}{\dfrac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}}},$$

on devra avoir, en tous les points d'une masse dénuée de force coercitive et soumise à l'aimantation,

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathcal{A} = - h\, F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \\ \mathcal{B} = - h\, F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \\ \mathcal{C} = - h\, F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}. \end{cases}$$

**2.** Ces équations sont les équations fondamentales de l'induction magnétique; avant de leur faire subir aucune transformation, nous allons en déduire quelques remarques importantes.

Ces équations donnent

$$\frac{\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}}{\mathcal{A}} = \frac{\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}}{\mathcal{B}} = \frac{\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}}{\mathcal{C}},$$

ce qui signifie que *l'axe magnétique en un point d'une masse isotrope dénuée de force coercitive et la grandeur géométrique dont les composantes sont*

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}$$

*sont dirigées suivant la même droite.* Cette proposition se retrouve dans toutes les théories de l'induction magnétique proposées jusqu'ici; elle est une conséquence plus ou moins immédiate des hypothèses sur lesquelles reposent ces théories. Les équations (2) donnent encore

$$(3) \qquad \frac{\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)^2}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2} = h^2[F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)]^2.$$

*Le rapport de la grandeur géométrique précédente à l'intensité d'aimantation dépend de l'intensité d'aimantation et de la nature de la substance.*

Cette conséquence est conforme aux hypothèses faites par M. G. Kirchhoff sur l'aimantation par influence; toutes les théories de l'aimantation autres que celles de M. G. Kirchhoff conduisent à regarder le rapport précédent comme indépendant de l'intensité d'aimantation : nous avons vu que par là ces théories se mettaient en désaccord avec l'expérience.

Si le coefficient $F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ est positif, l'axe magnétique et la grandeur géométrique dont les projections sont $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}$ sont orientés en sens contraire. Le corps est dit alors *magnétique* ou *paramagnétique*. Si au contraire le coefficient $F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ est négatif, l'axe magnétique et la grandeur géométrique dont les projections sont $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}$ sont orientés dans le même sens. Le corps est dit *diamagnétique*. La théorie des corps diamagnétiques et la théorie des corps magnétiques se trouvent donc comprises en une seule et même théorie; l'existence des corps diamagnétiques ne présente pas ici les difficultés qu'elle présentait dans la théorie de Poisson.

### § II. — Le problème de l'induction magnétique se ramène à la détermination de la fonction $\mathcal{V}(x, y, z)$ (¹).

3. Nous allons démontrer maintenant que les équations (2) permettent, lorsqu'on connaît la valeur de la fonction $\mathcal{V}(x, y, z)$ en tous les points d'une masse dénuée de force coercitive, de déterminer les valeurs des quantités $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ en tous les points de cette masse, c'est-à-dire de résoudre complètement le problème de l'induction magnétique.

L'équation (3) peut s'écrire

$$(4) \qquad \left[\frac{\mathfrak{M}}{h\,\mathrm{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}\right]^2 = \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2.$$

Si l'on connaît en chaque point la nature du corps parfaitement doux que l'on étudie, $\mathrm{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ est, en chaque point, une fonction parfaitement déterminée de $\mathfrak{M}$; nous verrons plus loin comment l'expérience permet de déterminer la forme de cette fonction. Dès lors le premier membre de l'équation précédente est une fonction parfaitement déterminée de $\mathfrak{M}$, et cette équation donne $\mathfrak{M}$ en fonction de

$$\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2.$$

Nous supposerons cette équation (4) résolue par rapport à $\mathfrak{M}$, et nous écrirons

$$(5) \qquad \mathfrak{M} = \sigma\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right].$$

Posons maintenant, d'une manière générale,

$$(6) \qquad \lambda(\zeta, \alpha, \beta, \ldots) = -h\,\mathrm{F}[\sigma(\zeta), \alpha, \beta, \ldots].$$

Les expériences qui font connaître la forme de la fonction F feront con-

(¹) Ce paragraphe et le suivant sont le développement d'idées indiquées par G. Kirchhoff [G. Kirchhoff, *Ueber den Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen* (*Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik*, t. XLVIII, 1853; *Kirchhoff's gesammelte Abhandlungen*, p. 193)].

naître aussi la forme de la fonction $\lambda$, et les équations (2) deviendront

$$(7)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = \lambda \left\{ \left[ \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)^2 \right], \alpha, \beta, \ldots \right\} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \\ \mathcal{B} = \lambda \left\{ \left[ \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)^2 \right], \alpha, \beta, \ldots \right\} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \\ \mathcal{C} = \lambda \left\{ \left[ \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)^2 \right], \alpha, \beta, \ldots \right\} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}. \end{cases}$$

Ces équations permettent, comme nous l'avions annoncé, de déterminer les trois quantités $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, lorsqu'on connaît en chaque point du corps soumis à l'aimantation la valeur de la fonction $\mathcal{V}$.

## § III. — Équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $\mathcal{V}(x, y, z)$.

4. Nous avons vu que la fonction $\mathcal{V}(x, y, z)$ satisfaisait en tous les points de l'espace non situés sur une surface de séparation de deux corps magnétiques ou d'un corps magnétique et d'un milieu non magnétique à l'équation suivante [Chapitre I, § II, éq. (12)]

$$(8)\qquad \Delta\mathcal{V} = -4\pi\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}\right).$$

De là on peut déduire la forme de l'équation différentielle du second ordre à laquelle la fonction $\mathcal{V}$ satisfait en tous les points de l'espace, sauf aux divers points des surfaces limites.

Dans la partie de l'espace occupé par le milieu non magnétique, l'équation précédente se réduit à l'équation de Laplace

$$(9)\qquad \Delta\mathcal{V} = 0.$$

A l'intérieur des aimants permanents, l'aimantation en chaque point est censée connue, en sorte que le second membre de l'équation (8) est une fonction connue de $x$, $y$, $z$. Si nous désignons cette fonction par $-4\pi\rho(x, y, z)$, la fonction $\mathcal{V}$ vérifiera en tout point intérieur aux aimants permanents l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(9\ bis)\qquad \Delta\mathcal{V} = -4\pi\rho(x, y, z).$$

Envisageons maintenant un point intérieur à l'une des masses magné-

tiques dénuées de force coercitive que renferme le système. En ce point, les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de l'aimantation vérifient les équations (7).

Différentions la première des équations (7) par rapport à $x$. Posons, pour abréger,

$$G = \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2.$$

Nous aurons

$$\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} = \partial\lambda(G, \alpha, \beta, \ldots)\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial\lambda(G, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial G}\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}$$
$$+ \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\left[\frac{\partial\lambda(G, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\lambda(G, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x} + \ldots\right];$$

les termes de la seconde ligne disparaissent d'eux-mêmes lorsque la substance est homogène.

Mais on a

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x\,\partial z}\right).$$

Remplaçons $\frac{\partial G}{\partial x}$ par cette valeur dans l'expression de $\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}$; formons de même les expressions de $\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}$, $\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}$; ajoutons ces trois quantités, en tenant compte de l'équation (8), et nous aurons

$$(9)\quad \left(1 + 4\pi\lambda\left\{\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right], \alpha, \beta, \ldots\right\}\right)\Delta\mathcal{V}$$
$$+ 2\,\frac{\partial\lambda\left\{\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right], \alpha, \beta, \ldots\right\}}{\partial\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right]}$$
$$\times\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial z^2}\right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial y\,\partial z} + 2\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial z\,\partial x} + 2\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x\,\partial y}\right]$$
$$+ \frac{\partial\lambda\left\{\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right], \alpha, \beta, \ldots\right\}}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)$$
$$+ \frac{\partial\lambda\left\{\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right], \alpha, \beta, \ldots\right\}}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)$$
$$+ \ldots = 0.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles du second ordre que la fonction $\mathcal{V}(x, y, z)$ doit vérifier en tous les points d'une masse dénuée de force coercitive soumise à l'aimantation.

Les équations (9), (9 *bis*), (9 *ter*) nous fournissent donc les équations différentielles que la fonction $\mathcal{V}$ doit vérifier en tous les points de l'espace, sauf aux divers points des surfaces limites.

### § IV. — Conditions aux limites auxquelles satisfait la fonction $\mathcal{V}(x, y, z)$.

5. Cherchons à quelle condition satisfait la fonction $\mathcal{V}(x, y, z)$ en un point de l'une des surfaces limites.

Supposons qu'une surface sépare deux milieux, dont l'un au moins soit magnétique. Soient, en un point de cette surface, $N_1$ la normale dirigée vers l'intérieur du premier milieu et $N_2$ la normale dirigée vers l'intérieur du second milieu. Soient $\mathcal{V}_1(x, y, z)$ la fonction $\mathcal{V}$ relative au premier milieu, $\mathcal{V}_2(x, y, z)$ la fonction $\mathcal{V}$ relative au second. Soit $M_1$ un point du premier milieu infiniment voisin du point considéré de la surface limite. Soient $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$ les composantes de l'aimantation en ce point. Soit, en ce point, $\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial N_1}$ la dérivée de $\mathcal{V}_1$ suivant la normale $N_1$. Soit, de même, $M_2$ un point du second milieu. Adoptons pour ce point des notations analogues à celles que nous avons adoptées pour le point $M_1$, et nous aurons, d'une manière générale,

$$(10) \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_1} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_2} = -4\pi\big[\mathcal{A}_1 \cos(N_1, x) + \mathcal{B}_1 \cos(N_1, y) + \mathcal{C}_1 \cos(N_1, z) + \mathcal{A}_2 \cos(N_2, x) + \mathcal{B}_2 \cos(N_2, y) + \mathcal{C}_2 \cos(N_2, z)\big],$$

égalité qui se réduit à l'égalité (11) du Chapitre I lorsqu'un des deux milieux n'est pas magnétique.

Les surfaces limites que l'on peut avoir à considérer sont de cinq espèces différentes :

1° Surface de séparation d'un aimant permanent et d'un milieu non magnétique;

2° Surface de séparation de deux aimants permanents;

3° Surface de séparation d'une substance dénuée de force coercitive et d'un milieu non magnétique;

4° Surface de séparation de deux substances dénuées de force coercitive;

5° Surface de séparation d'un aimant permanent et d'une substance dénuée de force coercitive.



1° *A la surface de séparation d'un aimant permanent et d'un milieu non magnétique*, voyons ce que devient la relation (10). Supposons que l'indice (1) se rapporte à l'aimant et l'indice (2) au milieu. Remplaçons les symboles $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_1}$ et $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_2}$ par les symboles, plus souvent usités en pareil cas, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_i}$ et $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e}$. A l'intérieur du milieu non magnétique, nous avons

$$\mathcal{A}_2 = 0, \qquad \mathcal{B}_2 = 0, \qquad \mathcal{C}_2 = 0,$$

tandis qu'à l'intérieur de l'aimant $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$ sont des quantités censées connues d'avance. La relation (10) devient donc

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e} = 4\pi s(x, y, z), \tag{11}$$

$s(x, y, z)$ étant une fonction dont la valeur se déduit immédiatement des données du problème.

2° De même, *à la surface de séparation de deux aimants*, la relation (10) devient

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_1} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_2} = -4\pi[s_1(x, y, z) + s_2(x, y, z)], \tag{11 bis}$$

$s_1(x, y, z)$ et $s_2(x, y, z)$ étant deux fonctions dont la valeur se déduit immédiatement des données du problème.

3° *A la surface de séparation d'une substance dénuée de force coercitive et d'un milieu non magnétique*, examinons ce que devient la relation (10). Supposons que l'indice (1) se rapporte à la substance magnétique et l'indice (2) à la substance non magnétique. Remplaçons les symboles $N_1$ et $N_2$ par les symboles $N_i$ et $N_e$.

A l'intérieur du milieu non magnétique, nous avons

$$\mathcal{A}_2 = 0, \qquad \mathcal{B}_2 = 0, \qquad \mathcal{C}_2 = 0.$$

Au contraire, à l'intérieur de la substance dénuée de force coercitive, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}_1$ sont donnés par les équations (7) du présent Chapitre. On a donc

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_1 \cos(N_i, x) + \mathcal{B}_1 \cos(N_i, y) + \mathcal{C}_1 \cos(N_i, z) \\
&\quad = \lambda\left\{\left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_i}\right)^2\right], \alpha, \beta, \ldots\right\} \\
&\qquad \times \left[\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_i} \cos(N_i, x) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_i} \cos(N_i, y) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_i} \cos(N_i, z)\right].
\end{aligned}$$

Mais on a aussi

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_i} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_i}\cos(N_i, x) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_i}\cos(N_i, y) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_i}\cos(N_i, z).$$

La relation (10) devient donc, en tout point de la surface considérée,

$$(11\ ter)\quad \left(1+4\pi\lambda\left\{\left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_i}\right)^2\right], \alpha, \beta, \ldots\right\}\right)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_i}+\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e}=0.$$

4° De même, *à la surface de séparation de deux substances dénuées de force coercitive*, la relation (10) devient

$$(11'')\quad \left(1+4\pi\lambda_1\left\{\left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_1}\right)^2\right], \alpha_1, \beta_1, \ldots\right\}\right)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_1}$$
$$+\left(1+4\pi\lambda_2\left\{\left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_2}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_2}\right)^2\right], \alpha_2, \beta_2, \ldots\right\}\right)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_2}=0.$$

5° Enfin, *à la surface de séparation d'un aimant permanent* (1) *et d'un corps dénué de force coercitive* (2), la relation (10) devient

$$(11^v)\quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_1}+\left(1+4\pi\lambda_2\left\{\left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_2}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_2}\right)^2\right], \alpha_2, \beta_2, \ldots\right\}\right)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_2}$$
$$= -4\pi s_1(x, y, z),$$

$s_1(x, y, z)$ étant une fonction dont la valeur se déduit immédiatement des données du problème.

Si nous ajoutons qu'à l'infini on doit avoir

$$(12)\qquad \mathcal{V} = 0,$$

nous aurons énoncé toutes les équations qui déterminent la solution du problème de l'aimantation par influence.

## § VI. — Approximation de Poisson.

6. Revenons aux équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A} &= -h\,F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\,\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x},\\ \mathcal{B} &= -h\,F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\,\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y},\\ \mathcal{C} &= -h\,F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\,\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z},\end{aligned}\right.$$

sur lesquelles reposent toutes les considérations exposées dans le présent

Chapitre. Si l'on supposait que la fonction F devînt indépendante de $\mathfrak{M}$, ces équations deviendraient

$$(13)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = -h\gamma(\alpha, \beta, \ldots)\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \\ \mathfrak{B} = -h\gamma(\alpha, \beta, \ldots)\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \\ \mathfrak{C} = -h\gamma(\alpha, \beta, \ldots)\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}. \end{cases}$$

Elles auraient précisément la forme que présentent les équations de l'équilibre magnétique dans la théorie de Poisson et dans toutes les théories exposées jusqu'ici, sauf celle de M. G. Kirchhoff.

Quelle condition doit remplir la fonction $\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ pour qu'il en soit ainsi?

S'il en était ainsi, l'égalité (1) du présent Chapitre deviendrait

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{M}}{\gamma(\alpha, \beta, \ldots)},$$

et comme, en vertu de sa définition donnée par l'égalité (16) du Chapitre I, la fonction $\mathcal{F}$ devient égale à 0 en même temps que $\mathfrak{M}$, on aurait

$$\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) = \frac{1}{2\gamma(\alpha, \beta, \ldots)}\mathfrak{M}^2.$$

Ainsi, *pour que la théorie de Poisson soit exacte, il est nécessaire et suffisant que la fonction $\mathcal{F}$ soit proportionnelle au carré de l'intensité d'aimantation.*

Comme nous l'avons déjà dit dans l'Introduction, l'étude des substances fortement magnétiques, telles que le fer doux, montre que la théorie de Poisson est inacceptable, au moins pour ces substances. L'expérience semble prouver que, pour le fer doux, lorsque l'intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$ croît en valeur absolue, la fonction $F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ croît d'abord avec $\mathfrak{M}$, puis passe par un maximum, et décroît ensuite lorsque $\mathfrak{M}$ continue à croître.

Toutefois, la théorie de Poisson est approximativement exacte pour les corps faiblement aimantés. Il faut en conclure, d'après ce que nous venons de dire, que l'on a

$$(13)\quad \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) = \frac{1}{2\Gamma(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}\mathfrak{M}^2,$$

$\Gamma(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ tendant vers une limite finie $\gamma(\alpha, \beta, \ldots)$ lorsque $\mathfrak{M}$ tend vers 0.

# CHAPITRE III.

## LE PROBLÈME DE L'AIMANTATION PAR INFLUENCE ADMET UNE ET UNE SEULE SOLUTION. — STABILITÉ DE L'AIMANTATION.

### § I. — Existence d'une solution.

1. Nous avons vu au § I du Chapitre II que le problème de l'aimantation par influence se ramenait à celui-ci : trouver une distribution magnétique qui donne un minimum à la quantité

$$\mathfrak{F} = \mathrm{E}(\mathrm{U} - \mathrm{TS}) + \mathfrak{J} + \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv. \tag{1}$$

Existe-t-il toujours une semblable distribution ? C'est la question à laquelle nous nous proposons de répondre dans ce paragraphe.

D'après l'égalité (14) du Chapitre I, nous avons

$$\mathfrak{J} = \int \left( \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right) dv.$$

Cette égalité, lorsqu'on y remplace $\mathcal{V}$ par l'expression

$$\mathcal{V} = \int \left( \mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) dv',$$

qui lui sert de définition, devient

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} = \frac{h}{2} \int \Bigg[ & \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial x} \int \left( \mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) dv' \\ & + \mathcal{B} \frac{\partial}{\partial y} \int \left( \mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) dv' \\ & + \mathcal{C} \frac{\partial}{\partial z} \int \left( \mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \mathcal{B}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \mathcal{C}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) dv' \Bigg] dv, \end{aligned} \tag{2}$$

toutes les intégrales triples s'étendant au volume entier du système.

[illegible] surface
[illegible] vert

l'intérieur du corps (1),

$$\int\int\int\left(\mathcal{A}'_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'_1}+\mathcal{B}'_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'_1}+\mathcal{C}'_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'_1}\right)dx'_1\,dy'_1\,dz'_1$$

$$=-\mathbf{S}\left[\mathcal{A}'_1\cos(N'_1,x)+\mathcal{B}'_1\cos(N'_1,y)+\mathcal{C}'_1\cos(N'_1,z)\right]\frac{1}{r}\,d\sigma'_1$$

$$-\int\int\int\left(\frac{\partial\mathcal{A}'_1}{\partial x'_1}+\frac{\partial\mathcal{B}'_1}{\partial y'_1}+\frac{\partial\mathcal{C}'_1}{\partial z'_1}\right)\frac{1}{r}\,dx'_1\,dy'_1\,dz'_1.$$

Les limites des intégrations étendues l'une au corps (1) tout entier, l'autre à la surface qui le limite, ne dépendent pas de $x_1, y_1, z_1$, en sorte que l'on aura

$$\mathcal{A}_1\frac{\partial}{\partial x_1}\int\int\int\left(\mathcal{A}'_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'_1}+\mathcal{B}'_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'_1}+\mathcal{C}'_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'_1}\right)dx'_1\,dy'_1\,dz'_1$$

$$=-\mathcal{A}_1\mathbf{S}\left[\mathcal{A}'_1\cos(N'_1,x)+\mathcal{B}'_1\cos(N'_1,y)+\mathcal{C}'_1\cos(N'_1,z)\right]\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}\,d\sigma'_1$$

$$-\mathcal{A}_1\int\int\int\left(\frac{\partial\mathcal{A}'_1}{\partial x'_1}+\frac{\partial\mathcal{B}'_1}{\partial y'_1}+\frac{\partial\mathcal{C}'_1}{\partial z'_1}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}\,dx'_1\,dy'_1\,dz'_1.$$

et une intégration par parties donne

$$\int\left[\mathcal{A}_1\frac{\partial}{\partial x_1}\int\left(\mathcal{A}'_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'_1}+\mathcal{B}'_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'_1}+\mathcal{C}'_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'_1}\right)dv'_1\right]dv_1$$

$$=\mathbf{SS}\left[\mathcal{A}'_1\cos(N'_1,x)+\mathcal{B}'_1\cos(N'_1,y)+\mathcal{C}'_1\cos(N'_1,z)\right]\mathcal{A}_1\cos(N_1,x)\frac{1}{r}\,d\sigma'_1\,d\sigma_1$$

$$+\int\int\left(\frac{\partial\mathcal{A}'_1}{\partial x'_1}+\frac{\partial\mathcal{B}'_1}{\partial y'_1}+\frac{\partial\mathcal{C}'_1}{\partial z'_1}\right)\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial x_1}\frac{1}{r}\,dv_1\,dv'_1.$$

En transformant d'une manière analogue tous les termes qui figurent au second membre de l'égalité (2 *bis*), on trouve

C'est cette expression de $\mathfrak{F}$ que nous allons tout d'abord transformer.

Pour fixer les idées et ne point compliquer les formules, nous supposerons que le système renferme simplement un aimant permanent que nous désignerons par l'indice (1) et un corps magnétique dénué de force coercitive que nous désignerons par l'indice (2). L'égalité (2) pourra alors s'écrire plus explicitement

$$
\begin{aligned}
(2\ bis)\quad \mathfrak{F} = \frac{h}{2}\int\Bigg[ & \mathcal{A}_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\int\left(\mathcal{A}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1} + \mathcal{B}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_1} + \mathcal{C}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_1}\right) dv \\
& + \mathcal{B}_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\int\left(\mathcal{A}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1} + \mathcal{B}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_1} + \mathcal{C}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_1}\right) dv'_1 \\
& + \mathcal{C}_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\int\left(\mathcal{A}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1} + \mathcal{B}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_1} + \mathcal{C}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_1}\right) dv'_1 \Bigg] dv_1 \\
+ h\int\Bigg[ & \mathcal{A}_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\int\left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2}\right) dv_2 \\
& + \mathcal{B}_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\int\left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2}\right) dv_2 \\
& + \mathcal{C}_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\int\left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2}\right) dv_2 \Bigg] dv_1 \\
+ \frac{h}{2}\int\Bigg[ & \mathcal{A}_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\int\left(\mathcal{A}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + \mathcal{B}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + \mathcal{C}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2}\right) dv'_2 \\
& + \mathcal{B}_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\int\left(\mathcal{A}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + \mathcal{B}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + \mathcal{C}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2}\right) dv'_2 \\
& + \mathcal{C}_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\int\left(\mathcal{A}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + \mathcal{B}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + \mathcal{C}'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2}\right) dv'_2 \Bigg] dv_2.
\end{aligned}
$$

Une intégration par parties nous donne, en désignant par $\sigma_1$ la surface du corps (1) et par $N_1$ la normale en un point de la surface $\sigma_1$ dirigée vers

l'intérieur du corps (1),

$$\iiint\left(\mathcal{A}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1} + \mathcal{B}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_1} + \mathcal{C}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_1}\right) dx'_1\, dy'_1\, dz'_1$$

$$= -\mathbf{S}\left[\mathcal{A}'_1 \cos(N'_1, x) + \mathcal{B}'_1 \cos(N'_1, y) + \mathcal{C}'_1 \cos(N'_1, z)\right] \frac{1}{r}\, d\sigma'_1$$

$$- \iiint\left(\frac{\partial \mathcal{A}'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial \mathcal{B}'_1}{\partial y'_1} + \frac{\partial \mathcal{C}'_1}{\partial z'_1}\right) \frac{1}{r}\, dx'_1\, dy'_1\, dz'_1.$$

Les limites des intégrations étendues l'une au corps (1) tout entier, l'autre à la surface qui le limite, ne dépendent pas de $x_1, y_1, z_1$, en sorte que l'on aura

$$\mathcal{A}_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\iiint\left(\mathcal{A}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1} + \mathcal{B}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_1} + \mathcal{C}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_1}\right) dx'_1\, dy'_1\, dz'_1$$

$$= -\mathcal{A}_1 \mathbf{S}\left[\mathcal{A}'_1 \cos(N'_1, x) + \mathcal{B}'_1 \cos(N'_1, y) + \mathcal{C}'_1 \cos(N'_1, z)\right] \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\, d\sigma'_1$$

$$- \mathcal{A}_1 \iiint\left(\frac{\partial \mathcal{A}'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial \mathcal{B}'_1}{\partial y'_1} + \frac{\partial \mathcal{C}'_1}{\partial z'_1}\right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\, dx'_1\, dy'_1\, dz'_1.$$

et une intégration par parties donne

$$\int\left[\mathcal{A}_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\int\left(\mathcal{A}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1} + \mathcal{B}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_1} + \mathcal{C}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_1}\right) dv'_1\right] dv_1$$

$$= \mathbf{SS}\left[\mathcal{A}'_1 \cos(N'_1, x) + \mathcal{B}'_1 \cos(N'_1, y) + \mathcal{C}'_1 \cos(N'_1, z)\right] \mathcal{A}_1 \cos(N_1, x) \frac{1}{r}\, d\sigma'_1\, d\sigma_1$$

$$+ \iint\left(\frac{\partial \mathcal{A}'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial \mathcal{B}'_1}{\partial y'_1} + \frac{\partial \mathcal{C}'_1}{\partial z'_1}\right) \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} \frac{1}{r}\, dv_1\, dv'_1.$$

En transformant d'une manière analogue tous les termes qui figurent au second membre de l'égalité (2 *bis*), on trouve

$$
\begin{aligned}
(3)\quad \mathcal{F} = \frac{h}{2}\Big\{ & \mathbf{SS}[\mathcal{A}_1\cos(N_1,x)+\mathcal{B}_1\cos(N_1,y)+\mathcal{C}_1\cos(N_1,z)] \\
& \qquad [\mathcal{A}'_1\cos(N'_1,x)+\mathcal{B}'_1\cos(N'_1,y)+\mathcal{C}'_1\cos(N'_1,z)]\frac{1}{r}\,d\sigma_1\,d\sigma'_1 \\
& + 2\,\mathbf{SS}[\mathcal{A}_1\cos(N_1,x)+\mathcal{B}_1\cos(N_1,y)+\mathcal{C}_1\cos(N_1,z)] \\
& \qquad [\mathcal{A}_2\cos(N_2,x)+\mathcal{B}_2\cos(N_2,y)+\mathcal{C}_2\cos(N_2,z)]\frac{1}{r}\,d\sigma_1\,d\sigma_2 \\
& + \mathbf{SS}[\mathcal{A}_2\cos(N_2,x)+\mathcal{B}_2\cos(N_2,y)+\mathcal{C}_2\cos(N_2,z)] \\
& \qquad [\mathcal{A}'_2\cos(N'_2,x)+\mathcal{B}'_2\cos(N'_2,y)+\mathcal{C}'_2\cos(N'_2,z)]\frac{1}{r}\,d\sigma_2\,d\sigma'_2 \\
& + \int\!\!\int\left(\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial y_1}+\frac{\partial\mathcal{C}_1}{\partial z_1}\right)\left(\frac{\partial\mathcal{A}'_1}{\partial x'_1}+\frac{\partial\mathcal{B}'_1}{\partial y'_1}+\frac{\partial\mathcal{C}'_1}{\partial z'_1}\right)\frac{1}{r}\,dv_1\,dv'_1 \\
& + 2\int\!\!\int\left(\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial y_1}+\frac{\partial\mathcal{C}_1}{\partial z_1}\right)\left(\frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\mathcal{B}_2}{\partial y_2}+\frac{\partial\mathcal{C}_2}{\partial z_2}\right)\frac{1}{r}\,dv_1\,dv_2 \\
& + \int\!\!\int\left(\frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\mathcal{B}_2}{\partial y_2}+\frac{\partial\mathcal{C}_2}{\partial z_2}\right)\left(\frac{\partial\mathcal{A}'_2}{\partial x'_2}+\frac{\partial\mathcal{B}'_2}{\partial y'_2}+\frac{\partial\mathcal{C}'_2}{\partial z'_2}\right)\frac{1}{r}\,dv_2\,dv'_2 \\
& + 2\int\mathbf{S}\left(\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial y_1}+\frac{\partial\mathcal{C}_1}{\partial z_1}\right)[\mathcal{A}'_1\cos(N'_1,x)+\mathcal{B}'_1\cos(N'_1,y)+\mathcal{C}'_1\cos(N'_1,z)]\frac{1}{r}\,dv_1\,d\sigma'_1 \\
& + 2\int\mathbf{S}\left(\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial y_1}+\frac{\partial\mathcal{C}_1}{\partial z_1}\right)[\mathcal{A}_2\cos(N_2,x)+\mathcal{B}_2\cos(N_2,y)+\mathcal{C}_2\cos(N_2,z)]\frac{1}{r}\,dv_1\,d\sigma_2 \\
& + 2\int\mathbf{S}\left(\frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\mathcal{B}_2}{\partial y_2}+\frac{\partial\mathcal{C}_2}{\partial z_2}\right)[\mathcal{A}_1\cos(N_1,x)+\mathcal{B}_1\cos(N_1,y)+\mathcal{C}_1\cos(N_1,z)]\frac{1}{r}\,dv_2\,d\sigma_1 \\
& + 2\int\mathbf{S}\left(\frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\mathcal{B}_2}{\partial y_2}+\frac{\partial\mathcal{C}_2}{\partial z_2}\right)[\mathcal{A}'_2\cos(N'_2,x)+\mathcal{B}'_2\cos(N_2,y)+\mathcal{C}'_2\cos(N'_2,z)]\frac{1}{r}\,dv_2\,d\sigma'_2\Big\}.
\end{aligned}
$$

Cette expression de $\mathcal{F}$ met tout d'abord en évidence un théorème bien connu de la théorie du magnétisme. Cette expression montre en effet que $\mathcal{F}$ est le potentiel d'une distribution électrique ainsi obtenue :

En tout point intérieur à l'un des corps magnétiques du système, on donne à la densité électrique la valeur

$$\sqrt{\frac{h}{\varepsilon}}\left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right),$$

$\varepsilon$ étant la constante analogue à $h$ qui figure dans l'expression des actions électriques.

En tout point de la surface d'un corps magnétique du système, on donne

à la densité électrique la valeur

$$\sqrt{\frac{h}{\varepsilon}}\left[\mathcal{A}\cos(N_i, x) + \mathcal{B}\cos(N_i, y) + \mathcal{C}\cos(N_i, z)\right].$$

La quantité $\mathfrak{F}$ étant précisément, nous l'avons vu, le potentiel des actions mécaniques que les corps magnétiques du système exercent les uns sur les autres, on voit que ces actions sont identiques aux actions qu'exerceraient les uns sur les autres les mêmes corps, électrisés de la façon que nous venons d'indiquer.

2. Il est facile, en outre, de vérifier que la fonction potentielle de cette distribution électrique coïncide avec la fonction potentielle magnétique $\mathcal{V}$. En effet, la fonction potentielle magnétique $\mathcal{V}$ vérifie en tout point intérieur à l'un des corps magnétiques la relation

$$(4) \qquad \Delta\mathcal{V} = -4\pi\left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right);$$

en tout point du milieu non magnétique, elle vérifie l'équation de Laplace

$$(5) \qquad \Delta\mathcal{V} = 0.$$

Si l'on désigne par $N_e$ la normale vers l'extérieur en un point de l'une des surfaces $\sigma_1$ et $\sigma_2$, elle vérifie en tout point de ces surfaces la relation

$$(6) \qquad \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_i} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_e} = -4\pi\left[\mathcal{A}\cos(N_i, x) + \mathcal{B}\cos(N_i, y) + \mathcal{C}\cos(N_i, z)\right].$$

Enfin, à l'infini, la fonction $\mathcal{V}$ et le produit de la fonction $\mathcal{V}$ par la distance du point auquel elle se rapporte à un point quelconque situé à distance finie sont égaux à 0.

Or ces conditions sont aussi celles auxquelles doit satisfaire la fonction potentielle de la distribution électrique fictive; et, comme on sait qu'elles ne déterminent qu'une seule fonction $\mathcal{V}$, il en résulte que les deux fonctions potentielles coïncident.

D'après cela, nous aurons

$$(7) \qquad \begin{aligned}\mathcal{V} = {} & \int\left(\frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial\mathcal{C}_1}{\partial z_1}\right)\frac{1}{r}\,dv_1 + \int\left(\frac{\partial\mathcal{A}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\mathcal{B}_2}{\partial y_2} + \frac{\partial\mathcal{C}_2}{\partial z_2}\right)\frac{1}{r}\,dv_2 \\ & + \mathsf{S}\left[\mathcal{A}_1\cos(N_1, x) + \mathcal{B}_1\cos(N_1, y) + \mathcal{C}_1\cos(N_1, z)\right]\frac{1}{r}\,d\sigma_1 \\ & + \mathsf{S}\left[\mathcal{A}_2\cos(N_2, x) + \mathcal{B}_2\cos(N_2, y) + \mathcal{C}_2\cos(N_2, z)\right]\frac{1}{r}\,d\sigma_2.\end{aligned}$$

Dès lors, il est aisé de voir, en vertu des égalités (4), (6) et (7), que l'expression (3) de $\mathfrak{J}$ peut s'écrire

$$(8)\qquad \mathfrak{J} = -\frac{h}{8\pi}\Big[\int \mathcal{V}\,\Delta\mathcal{V}\,dv_1 + \int \mathcal{V}\,\Delta\mathcal{V}\,dv_2 + \mathbf{S}\,\mathcal{V}\Big(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_1} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_e}\Big)d\sigma_1 + \mathbf{S}\,\mathcal{V}\Big(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_2} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_e}\Big)d\sigma_2\Big].$$

Or le théorème de Green nous donne

$$(9)\qquad \begin{cases} \int \mathcal{V}\,\Delta\mathcal{V}\,dv_1 + \mathbf{S}\,\mathcal{V}\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_1}\,d\sigma_1 = -\int\Big[\Big(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\Big)^2\Big]dv_1, \\ \int \mathcal{V}\,\Delta\mathcal{V}\,dv_2 + \mathbf{S}\,\mathcal{V}\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_2}\,d\sigma_2 = -\int\Big[\Big(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\Big)^2\Big]dv_2. \end{cases}$$

Entourons le système d'une sphère de rayon extrêmement grand ayant pour centre un point fixe quelconque du système; désignons par l'indice (o) l'espace intérieur à cette sphère et extérieur aux corps (1) et (2). Soit $d\Sigma$ un élément de surface de cette sphère. Comme dans tout l'espace (o) nous avons

$$\Delta\mathcal{V} = 0,$$

le théorème de Green nous donnera

$$-\int\Big[\Big(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\Big)^2\Big]dv_0 = \mathbf{S}\,\mathcal{V}\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_0}\,d\Sigma + \mathbf{S}\,\mathcal{V}\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_0}\,d\sigma_1 + \mathbf{S}\,\mathcal{V}\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_0}\,d\sigma_2.$$

Mais, de ce que la fonction $\mathcal{V}$ tend vers o lorsque le rayon de la sphère augmente indéfiniment, de ce que, en outre, le produit de $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_0}$ par le carré du rayon de la sphère ne devient pas infini, il résulte que l'on peut prendre le rayon de la sphère assez grand pour que l'intégrale

$$\mathbf{S}\,\mathcal{V}\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_0}\,d\Sigma$$

soit plus petite que toute quantité donnée d'avance; on peut donc écrire

$$(9\ bis)\qquad \mathbf{S}\,\mathcal{V}\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_0}\,d\sigma_1 + \mathbf{S}\,\mathcal{V}\,\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial N_0}\,d\sigma_2 = -\int\Big[\Big(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\Big)^2\Big]dv_0,$$

l'intégrale triple s'étendant à tout l'espace extérieur aux corps (1) et (2).

Des équations (8), (9) et (9 *bis*), on déduit l'expression suivante de $\mathfrak{F}$

$$(10) \qquad \mathfrak{F} = \frac{h}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right]dv,$$

l'intégrale s'étendant à tout l'espace.

En reportant cette expression de $\mathfrak{F}$ dans l'équation (1) et en remarquant que $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ est égal à o en tout milieu non magnétique, on peut écrire

$$(11) \quad \mathfrak{F} = \mathrm{E}(\mathrm{U}-\mathrm{TS}) + \int\left\{\frac{h}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right] + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta \ldots)\right\}dv.$$

C'est l'expression de $\mathfrak{F}$ que nous voulions obtenir. Elle est exacte, quelle que soit la distribution magnétique sur le système.

3. Cette expression peut s'écrire encore de la manière suivante

$$
\begin{aligned}
(11\ bis) \quad \mathfrak{F} = \mathrm{E}(\mathrm{U}-\mathrm{TS}) &+ \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\,dv_1 \\
&+ \frac{h}{8\pi}\left\{\int\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right]dv_0\right. \\
&\qquad \left. + \int\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right]dv_1\right\} \\
&+ \int\left\{\frac{h}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right] + \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\right\}dv_2;
\end{aligned}
$$

les intégrales qui portent sur $dx_0\,dy_0\,dz_0$ sont étendues à tout le milieu non magnétique; les intégrales qui portent sur $dx_1\,dy_1\,dz_1$ sont étendues à tout l'espace occupé par les aimants permanents; enfin les intégrales qui portent sur $dx_2\,dy_2\,dz_2$ sont étendues à tout l'espace occupé par les substances dénuées de force coercitive.

Parmi toutes les distributions que peut affecter le magnétisme sur ces dernières substances, en existe-t-il une qui donne à la quantité précédente une valeur minima?

Les termes de la première ligne de l'expression de $\mathfrak{F}$ donnée par l'égalité (11 *bis*) conservent une valeur indépendante de la distribution qu'affecte le magnétisme sur les corps dénués de force coercitive. Nous n'avons donc point à en tenir compte.

Quelle que soit la distribution du magnétisme sur les substances dénuées de force coercitive, les termes de la seconde ligne forment un ensemble toujours positif.

Cherchons dans quelles conditions le terme qui forme la troisième ligne demeurera positif, quelle que soit la distribution du magnétisme sur les corps parfaitement doux.

De l'égalité (1) du Chapitre II qui définit $F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$, nous déduisons

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) = \int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)} d\mathfrak{M}.$$

Par conséquent, la quantité $\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ est toujours positive pour les corps magnétiques et toujours négative pour les corps diamagnétiques.

Cette circonstance ne nous permet pas de prévoir, pour les corps diamagnétiques, le signe des termes de la troisième ligne de l'égalité (11 *bis*). Mais, pour les corps magnétiques, nous pouvons affirmer que ces termes sont toujours positifs.

Par conséquent, pour le cas où toutes les substances dénuées de force coercitive que renferme le système sont des corps magnétiques, l'égalité (11 *bis*) revient à la suivante

$$\mathfrak{F} = C + P,$$

C étant une quantité indépendante de la distribution que le magnétisme affecte sur les corps dénués de force coercitive et P une quantité qui demeure positive, quelle que soit cette distribution; de plus, pour que la quantité P soit infinie, il est nécessaire et suffisant, dans le cas où le système ne renferme que des corps magnétiques, que l'une au moins des trois quantités $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}$ soit infinie en tous les points d'un espace fini.

De ce que nous venons de démontrer, pouvons-nous conclure qu'il existe au moins une distribution magnétique correspondant à une valeur de $\mathfrak{F}$ plus petite que toutes les autres, et par conséquent à un état magnétique stable? En le faisant, nous ne ferions que suivre la voie tracée par Sir W. Thomson pour la démonstration du principe dit de Dirichlet. Mais M. Weierstrass a signalé le défaut de rigueur que présente cette déduction; car, de ce que les variations d'une quantité sont limitées inférieurement, il ne résulte pas que cette quantité présente un minimum. C'est donc sous une réserve semblable à celle qui pèse sur le principe de Dirichlet que nous énoncerons la proposition suivante :

*Des corps magnétiques quelconques étant soumis à l'action d'aimants*

*quelconques, on peut trouver sur ces corps une distribution magnétique au moins qui satisfait aux lois de l'aimantation par influence et qui demeure stable si l'on maintient invariables la position, la forme et l'état des divers corps du système.*

### § II. — Il n'existe, pour les corps magnétiques, qu'une seule solution au problème de l'aimantation par influence. — Elle correspond à une aimantation stable.

4. Les équations du problème de l'aimantation par influence expriment simplement l'égalité à o de la variation première subie par la quantité $\mathfrak{F}$ lorsqu'en chaque point des substances dénuées de force coercitive que renferme le système on fait varier les composantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ de l'aimantation de quantités arbitraires $\delta\mathfrak{A}$, $\delta\mathfrak{B}$, $\delta\mathfrak{C}$. Cette égalité à o de la variation de $\mathfrak{F}$ peut-elle avoir lieu pour plusieurs distributions magnétiques distinctes? Lorsqu'elle a lieu, la fonction $\mathfrak{F}$ est-elle minimum, de telle façon que la distribution magnétique soit stable? Telles sont les questions que nous allons maintenant examiner.

La solution de ces questions découle de l'étude de la variation seconde de $\mathfrak{F}$.

Supposons que les composantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ de l'aimantation au point $(x, y, z)$ de l'une des masses dénuées de force coercitive du système varient de $\delta\mathfrak{A}$, $\delta\mathfrak{B}$, $\delta\mathfrak{C}$, et posons

$$\delta\mathfrak{A} = a\,\delta t,$$
$$\delta\mathfrak{B} = b\,\delta t,$$
$$\delta\mathfrak{C} = c\,\delta t,$$

$a$, $b$, $c$ étant en général des quantités finies, et $\delta t$ une quantité infiniment petite et positive indépendante de $x$, $y$, $z$.

Conservons, pour simplifier, l'hypothèse adoptée au paragraphe précédent, hypothèse dans laquelle le système renferme seulement un aimant permanent désigné par l'indice (1) et un corps parfaitement doux désigné par l'indice (2). Prenons pour $\mathfrak{F}$ l'expression

$$(1) \qquad \mathfrak{F} = \mathrm{E}(\mathrm{U} - \mathrm{TS}) + \Upsilon + \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\,dv,$$

et remplaçons-y $\Upsilon$ par sa valeur (2 *bis*). Il est aisé alors de voir que nous

aurons

$$\delta\mathcal{F} = \int \frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}} \delta\mathfrak{M}\, dv_2$$

$$+ h\,\delta t \int \Bigg[ \mathcal{A}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \int \left( a_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} + b_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} + c_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2} \right) dv_2$$

$$+ \mathcal{B}_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \int \left( a_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} + b_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} + c_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2} \right) dv_2$$

$$+ \mathcal{C}_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \int \left( a_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} + b_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_2} + c_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_2} \right) dv_2 \Bigg] dv_1$$

$$+ h\,\delta t \int \Bigg[ \mathcal{A}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \int \left( a'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + b'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + c'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv'_2$$

$$+ \mathcal{B}_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \int \left( a'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + b'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + c'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv'_2$$

$$+ \mathcal{C}_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \int \left( a'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + b'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + c'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv'_2 \Bigg] dv_2,$$

puis, par une nouvelle variation,

$$(12)\quad \delta^2\mathcal{F} = \int \delta\left[ \frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}} \delta\mathfrak{M} \right] dv_2$$

$$+ h\,\delta t^2 \int \Bigg[ a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \int \left( a'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + b'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + c'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv'_2$$

$$+ b_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \int \left( a'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + b'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + c'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv'_2$$

$$+ c_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \int \left( a'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + b'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + c'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv'_2 \Bigg] dv_2.$$

Considérons la quantité qui figure au second membre en facteur de $\delta t^2$; cette quantité a une interprétation qui nous permettra de suite de la transformer; supposons que, sur les masses dénuées de force coercitive, on forme une distribution magnétique telle que l'aimantation en chaque point ait pour composantes $a_2$, $b_2$, $c_2$. La quantité que nous considérons sera le

potentiel $\mathfrak{J}$ de cette distribution. Dès lors, nous pourrons faire subir à cette quantité la même transformation qu'au § I du présent Chapitre nous avons fait subir au potentiel d'une distribution magnétique quelconque.

Soit $v$ la fonction potentielle de la distribution que nous considérons ici; $v$ est donné par l'égalité

$$(13) \qquad v(x, y, z) = \int \left( a'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2} + b'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'_2} + c'_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'_2} \right) dv'_2.$$

Désignons par l'indice (3) tout l'espace non occupé par des corps parfaitement doux. Le coefficient de $\delta t^2$ au second membre de l'égalité (12) va devenir

$$\frac{h}{8\pi} \int \left[ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right] dv_3$$
$$+ \frac{h}{8\pi} \int \left[ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right] dv_2,$$

et l'égalité (12) elle-même deviendra

$$(14) \quad \delta^2 \mathfrak{F} = \frac{h\, \delta t^2}{8\pi} \int \left[ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right] dv_3$$
$$+ \frac{h\, \delta t^2}{8\pi} \int \left\{ \left[ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right] + \frac{1}{\delta t^2} \delta \left[ \frac{\partial \mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}} \delta \mathfrak{M} \right] \right\} dv_2.$$

Nous allons faire subir à cette égalité (14) une dernière formation.

L'égalité (1) du Chapitre (II) nous donne

$$\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{\partial \mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}}}.$$

Nous en déduisons

$$(15) \quad \delta \left[ \frac{\partial \mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}} \delta \mathfrak{M} \right] = \delta \left[ \frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)} \delta \mathfrak{M} \right]$$
$$= \left\{ \frac{1}{\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)} - \frac{\mathfrak{M}}{[\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)]^2} \frac{\partial \mathrm{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}} \right\} \delta \mathfrak{M}^2$$
$$+ \frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)} \delta^2 \mathfrak{M}.$$

Mais l'égalité

$$(16) \qquad \mathfrak{M}^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2$$

nous donne, en premier lieu,

$$(17) \qquad \delta\mathfrak{M} = \frac{\mathcal{A}a + \mathcal{B}b + \mathcal{C}c}{\mathfrak{M}}\,\delta t$$

et, en second lieu,

$$\delta^2\mathfrak{M} = \frac{a^2+b^2+c^2}{\mathfrak{M}}\,\delta t^2 - \frac{\mathcal{A}a + \mathcal{B}b + \mathcal{C}c}{\mathfrak{M}}\,\delta\mathfrak{M}\,\delta t,$$

ou, en posant

$$\delta\mathfrak{M} = m\,\delta t$$

et en tenant compte de l'égalité (17),

$$\delta^2\mathfrak{M} = \frac{a^2+b^2+c^2-m^2}{\mathfrak{M}}\,\delta t^2.$$

L'égalité (15) devient donc

$$(18) \quad \delta\left[\frac{\partial\mathcal{F}_2(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)}{\partial\mathfrak{M}}\,\delta\mathfrak{M}\right] = \left\{\frac{a^2+b^2+c^2}{F_2(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)} - \frac{\mathfrak{M}\,\dfrac{\partial F_2(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)}{\partial\mathfrak{M}}}{[F_2(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)]^2}\,m^2\right\} dt^2.$$

L'égalité (14) devient alors, en tenant compte de cette égalité (18),

$$(19) \quad \delta^2\mathcal{F} = \frac{h\,\delta t^2}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] dv_1$$
$$+ \delta t^2 \int\left\{\frac{h}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]\right.$$
$$\left. + \frac{a^2+b^2+c^2}{F_2(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)} - \frac{\mathfrak{M}\,\dfrac{\partial F_2(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)}{\partial\mathfrak{M}}}{[F_2(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)]^2}\,m^2\right\} dv_2.$$

Le signe de cette quantité est impossible à préciser pour les corps diamagnétiques; pour les corps magnétiques, $F_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ est positif; en général, cette quantité décroît lorsque $\mathfrak{M}$ augmente; on est alors assuré que $\delta^2\mathcal{F}$ est toujours positif. Pour le fer doux, $F_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ croît pour les faibles valeurs de $\mathfrak{M}$; mais les accroissements de cette quantité sont faibles, et comme $\mathfrak{M}$ a en même temps de petites valeurs, la quantité

$$\frac{\mathfrak{M}\,\dfrac{\partial F_2(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)}{F_2(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)}}{[F_2(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)]^2}\,m^2$$

a, dans ces conditions, une valeur absolue beaucoup plus faible que

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{F_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)},$$

en sorte que $\delta^2 \mathfrak{F}$ est encore positif.

On peut donc dire que, *pour tous les corps magnétiques connus, $\delta^2 \mathfrak{F}$ est toujours positif.*

De ce résultat, il est aisé de déduire en toute rigueur cette autre proposition :

*Pour des corps magnétiques placés sous l'action d'aimants permanents donnés, il existe au plus une distribution telle que la variation première du potentiel thermodynamique interne soit identiquement nulle, et cette distribution est stable.*

## § III. — Existe-t-il, pour les corps diamagnétiques, plus d'une solution au problème de l'influence?

5. La démonstration précédente ne permet pas de prévoir, pour les corps diamagnétiques, s'il existe une ou plusieurs distributions résolvant le problème de l'aimantation par influence pour un corps de forme et de position données soumis à l'action d'aimants donnés.

Il serait au contraire possible de démontrer qu'il existe pour un corps diamagnétique un seul état d'équilibre stable en prenant pour point de départ la théorie de Poisson.

Si l'on adopte en effet la théorie de Poisson, si l'on désigne par $\mathfrak{W}$ la fonction potentielle magnétique du corps soumis à l'aimantation, et par $\mathfrak{V}$ la fonction potentielle des aimants permanents, la fonction $\mathfrak{W}$ est soumise aux conditions suivantes :

La fonction $\mathfrak{W}$ est finie, continue et uniforme dans tout l'espace; elle est égale à o à l'infini; ses dérivées partielles sont finies, continues et uniformes dans tout l'espace, sauf sur la surface $\Sigma$ qui limite le corps soumis à l'aimantation; elles sont égales à o à l'infini; à la traversée de la surface $\Sigma$, elles vérifient la condition

$$(20) \qquad (1+4\pi h F)\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial N_i}+\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial N_e}+4\pi h F\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N_i}=0$$

dans tout l'espace, sauf sur la surface $\Sigma$; les dérivées partielles du second

ordre de la fonction $\mathfrak{W}$ existent et vérifient l'équation

$$\Delta\mathfrak{W} = 0.$$

Peut-il exister deux fonctions distinctes $\mathfrak{W}$ et $\mathfrak{W}'$ assujetties à ces conditions? S'il en existe deux, soit $\Theta$ leur différence.

Dans tout l'espace $e$, extérieur à la surface $\Sigma$, on a

$$\Delta\mathfrak{W} = 0, \qquad \Delta\mathfrak{W}' = 0$$

et, par conséquent,

$$\Delta\Theta = 0.$$

On a donc

$$\int_e \Delta\Theta \, dv = 0. \tag{21}$$

D'ailleurs, à l'infini, on a

$$\mathfrak{W} = 0, \qquad \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N} = 0, \qquad \mathfrak{W}' = 0, \qquad \frac{\partial\mathfrak{W}'}{\partial N'} = 0,$$

d'où

$$\Theta = 0, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial N} = 0.$$

L'égalité (21) devient donc, en vertu du théorème de Green,

$$\mathbf{S}_\Sigma \frac{\partial\Theta}{\partial N_e} d\Sigma + \int_e \left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2\right] dv = 0. \tag{22}$$

Dans tout l'espace $i$, intérieur à la surface $\Sigma$, on a

$$\Delta\Theta = 0$$

et, par conséquent,

$$\int_i \Delta\Theta \, dv = 0,$$

ce qui, en vertu du théorème de Green, devient

$$\mathbf{S}_\Sigma \frac{\partial\Theta}{\partial N_i} d\Sigma + \int_i \left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2\right] dv = 0. \tag{23}$$

Les deux fonctions $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{V}'$ vérifiant la condition (20), on a

$$\frac{\partial\Theta}{\partial N_e} + (1 + 4\pi h F)\frac{\partial\Theta}{\partial N_i} = 0. \tag{24}$$

Multiplions les deux membres de l'égalité (23) par $(1 + 4\pi h F)$, et ajoutons membre à membre le résultat obtenu avec l'égalité (22), en tenant compte de l'égalité (24). Nous trouvons

$$\int_e \left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2\right] dv$$
$$+ (1 + 4\pi h F)\int_i \left[\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right)^2\right] dv = 0.$$

Pour les corps magnétiques, F est positif; pour les corps diamagnétiques, F est négatif, mais toujours inférieur en valeur absolue à $\frac{1}{4\pi h}$. La quantité $(1 + 4\pi h F)$ est donc toujours positive pour tous les corps connus. L'égalité précédente ne peut donc avoir lieu que si l'on a dans tout l'espace

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\Theta}{\partial z} = 0;$$

et comme $\Theta$ est continu dans tout l'espace et nul à l'infini, ces égalités montrent que $\Theta$ doit être égal à 0 dans tout l'espace. Donc, dans la théorie de Poisson, il n'existe qu'un seul état d'équilibre magnétique, aussi bien pour les corps magnétiques que pour les corps diamagnétiques ([1]).

Voici maintenant un raisonnement général qui, sans prouver rigoureusement l'existence de plusieurs états d'équilibre magnétique pour un corps diamagnétique, rend au moins très vraisemblable cette existence.

Considérons un système renfermant un corps dénué de force coercitive, que nous désignerons par l'indice (2), et des aimants permanents que nous désignerons par l'indice (1).

En désignant par $\mathfrak{V}_1$ la fonction potentielle des aimants en un point de ces aimants, par $v_2$ la fonction potentielle des aimants (1) en un point du corps (2), par $\mathfrak{V}_2$ la fonction potentielle du corps (2) en un point de ce

([1]) Dans une Note *Sur l'aimantation des corps diamagnétiques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CVI, p. 736; 12 mars 1888), j'avais indiqué par erreur que la proposition qui vient d'être énoncée ne peut être démontrée pour les corps diamagnétiques.

corps, le potentiel thermodynamique interne de ce corps peut s'écrire

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} = \mathrm{E}(\mathrm{U}-\mathrm{TS}) &+ \frac{h}{2}\int\left(\mathcal{A}_1\frac{\partial\mathcal{W}_1}{\partial x_1}+\mathcal{B}_1\frac{\partial\mathcal{W}_1}{\partial y_1}+\mathcal{C}_1\frac{\partial\mathcal{W}_1}{\partial z_1}\right)dv_1\\ &+h\int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right)dv_2\\ &+\frac{h}{2}\int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial z_2}\right)dv_2\\ &+\int\mathfrak{F}(\mathfrak{M}_1)\,dv_1+\int\mathfrak{F}(\mathfrak{M}_2)\,dv_2.\end{aligned}$$

Cette expression est générale. Elle est exacte, en particulier, si la distribution magnétique sur le corps (2) est une distribution d'équilibre.

Considérons une certaine distribution d'équilibre correspondant à une certaine position du corps diamagnétique et des aimants; puis, supposons que, le corps étant placé dans la même position, on donne à toutes les particules de ce corps la même aimantation, sauf à la particule $dx_2\,dy_2\,dz_2 = dv_2$ que l'on supposera non aimantée. $\mathfrak{F}$ aura alors une nouvelle valeur $\mathfrak{F}'$ et l'on aura

$$\mathfrak{F}'-\mathfrak{F} = -h\left[\mathcal{A}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_2+\mathcal{W}_2)}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_2+\mathcal{W}_2)}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_2+\mathcal{W}_2)}{\partial z_2}\right]dv_2-\mathfrak{F}(\mathfrak{M}_2)\,dv_2,$$

les quantités qui figurent au second membre ayant toutes la valeur qu'elles ont dans l'état d'équilibre considéré. Or, dans cet état d'équilibre, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 &= -h\,\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)\frac{\partial(\mathcal{V}_2+\mathcal{W}_2)}{\partial x_2},\\ \mathcal{B}_2 &= -h\,\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)\frac{\partial(\mathcal{V}_2+\mathcal{W}_2)}{\partial y_2},\\ \mathcal{C}_2 &= -h\,\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)\frac{\partial(\mathcal{V}_2+\mathcal{W}_2)}{\partial z_2}.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_2+\mathcal{W}_2)}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_2+\mathcal{W}_2)}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial(\mathcal{V}_2+\mathcal{W}_2)}{\partial z_2}\\ &\quad= -\frac{1}{h\,\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)}(\mathcal{A}_2^2+\mathcal{B}_2^2+\mathcal{C}_2^2) = -\frac{\mathfrak{M}_2^2}{h\,\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathfrak{F}'-\mathfrak{F} = \left[\frac{\mathfrak{M}_2^2}{\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)}-\mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}_2)\right]dv_2.$$

Mais on sait que l'on a

$$\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2) = \frac{\mathfrak{M}_2}{\dfrac{d\mathfrak{F}_2(\mathfrak{M}_2)}{d\mathfrak{M}_2}}$$

et

$$\mathfrak{F}_2(0) = 0.$$

On a donc

$$\mathfrak{F}' - \mathfrak{F} = \left[\frac{\mathfrak{M}_2^2}{\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)} - \int_0^{\mathfrak{M}_2} \frac{\mathfrak{M}}{\mathrm{F}(\mathfrak{M})}\, d\mathfrak{M}\right] dv_2$$

ou bien, en désignant par $\mu$ une valeur comprise entre o et $\mathfrak{M}_2$,

$$\mathfrak{F}' - \mathfrak{F} = \mathfrak{M}_2^2\left[\frac{1}{\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)} - \frac{1}{2\mathrm{F}_2(\mu)}\right] dx_2\, dy_2\, dz_2.$$

Considérons maintenant des corps diamagnétiques seulement, pour lesquels la fonction F est constamment négative, et supposons que la fonction F soit assujettie à l'une des conditions suivantes :

1° Ou bien la fonction magnétisante est indépendante de l'intensité d'aimantation ;

2° Ou bien sa valeur absolue décroît lorsque l'intensité d'aimantation croît ;

3° Ou bien sa valeur absolue croît avec l'intensité d'aimantation, mais assez faiblement pour qu'une de ses valeurs ne soit jamais double d'une autre de ses valeurs.

Ces restrictions sont certainement vérifiées par tous les corps diamagnétiques connus dans les limites où l'on a pu les étudier jusqu'ici.

Moyennant ces restrictions,

$$\frac{1}{\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}_2)} - \frac{1}{2\mathrm{F}_2(\mu)}$$

est certainement négatif.

On voit, d'après cela, que, si, pour un quelconque des corps diamagnétiques vérifiant les restrictions précédentes, on considère une distribution magnétique d'équilibre correspondant à un minimum du potentiel thermodynamique, on peut toujours trouver une distribution pour laquelle le potentiel thermodynamique a une valeur moindre que dans l'état d'équilibre considéré.

Dès lors, s'il existe sur le corps diamagnétique un état d'équilibre magnétique, c'est-à-dire un minimum du potentiel thermodynamique, ou bien le potentiel thermodynamique présentera une infinité d'autres minima, ou



bien il existera un nombre fini ou infini de séries illimitées et continues de distributions magnétiques, telles que le long de chacune d'elles le potentiel thermodynamique décroisse sans cesse.

Une série semblable à celle que nous venons de considérer représenterait une transformation possible du corps diamagnétique. Si donc une circonstance quelconque amenait la distribution sur ce corps à se confondre avec l'un des termes de cette série, il pourrait se faire qu'à partir de ce moment, bien que le corps demeurât invariable de position en présence d'aimants invariables, son aimantation se mît à varier indéfiniment sans jamais parvenir à un état permanent.

Comme nous avons vu directement que, pour un corps diamagnétique dont le coefficient d'aimantation est constant, il ne peut exister plusieurs états d'équilibre magnétique, la démonstration que nous avons exposée conduit à penser qu'un semblable corps présenterait le singulier phénomène que nous venons de décrire. Pour un corps diamagnétique dont le coefficient d'aimantation est variable, il pourrait présenter soit le phénomène que nous venons de décrire, soit plusieurs états d'équilibre, soit à la fois l'une et l'autre particularité.

Ces conséquences quelque peu paradoxales paraissent avoir déjà reçu un commencement de vérification expérimentale. Il en résulterait en effet qu'un corps diamagnétique, placé dans une position déterminée dans un champ magnétique déterminé, pourrait présenter un moment magnétique variable avec la série de transformations qui a servi à l'amener dans ce champ. C'est ce que semblent montrer de récentes expériences de M. P. Joubin (¹).

« J'avais essayé, il y a quelque temps, dit M. P. Joubin, d'utiliser l'aimantation des corps diamagnétiques pour mesurer l'intensité d'un champ magnétique, ce qui donnerait une méthode très rapide; mais, dès les premiers pas, une difficulté singulière s'était présentée, qui m'avait empêché de continuer. »

Cette difficulté résultait de l'observation suivante.

Un petit barreau de bismuth, muni d'un léger miroir, était suspendu par un bifilaire entre les deux pôles d'un électro-aimant. Sous l'influence

(¹) P. Joubin, *Sur la mesure des champs magnétiques par les corps diamagnétiques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CVI, p. 735; 12 mars 1888).

des forces magnétiques et du couple de la suspension, il prenait une nouvelle position d'équilibre, *très peu différente de la première*, d'où l'on comptait déduire la valeur du champ. Mais il fut immédiatement évident que, pour le but proposé, la méthode ne valait rien.

En effet, pour un même courant, c'est-à-dire pour un même champ, la position du barreau dépendait de la suite des modifications magnétiques qu'on lui avait fait subir. Si l'on trace une courbe en prenant comme abscisse l'intensité du courant et comme ordonnées les déviations, le point figuratif se déplace sur une ligne droite quand on fait croître les intensités de 0 à 40 ampères; mais si, à partir de ce moment, on diminue graduellement le courant, le point se déplace sur une autre droite très inclinée par rapport à la précédente, de telle sorte que, lorsqu'on revient à 15 ampères, la déviation est presque double de celle qui correspondait primitivement au même courant.

Si l'on ouvre ensuite le circuit, et si l'on recommence l'expérience, on retrouve la série des déviations représentées par la première droite, ce qui exclut l'idée de chercher l'explication du phénomène observé dans une aimantation permanente du barreau de bismuth ([1]).

Le même fait s'est produit avec un simple miroir de verre rectangulaire, qui s'aimante comme le bismuth, mais plus faiblement. L'augmentation du moment magnétique pour un même courant atteignait encore, dans ce cas, le quinzième de sa valeur, changement bien considérable pour pouvoir être attribué à une variation dans la grandeur du champ.

M. P. Joubin, qui avait fait ces expériences sans connaître la théorie que nous venons d'exposer, pense qu'elles peuvent servir à confirmer les conséquences paradoxales de cette théorie.

Cette question est assurément encore fort obscure, tant au point de vue théorique qu'au point de vue expérimental. M. Joubin doit reprendre ses recherches sur ce sujet. Les résultats auxquels il parviendra contribueront certainement à éclaircir quelque peu ce problème.

---

([1]) Ce dernier détail ne se trouve point dans la Note publiée par M. P. Joubin. Je le tiens de M. P. Joubin lui-même.





# CHAPITRE IV.

## ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT D'UNE MASSE MAGNÉTIQUE EN PRÉSENCE D'AIMANTS.

---

### § I. — Équations d'équilibre d'une masse magnétique en présence d'aimants.

1. Nous avons examiné les lois qui président à la distribution stable du magnétisme sur une masse magnétique ou diamagnétique mise en présence d'aimants permanents et maintenue invariable de forme, de position et d'état physique et chimique. Une nouvelle question s'impose maintenant : une masse magnétique invariable de forme, de position et d'état physique étant placée en présence d'aimants permanents, dans quelles circonstances sera-t-elle en équilibre? Cet équilibre sera-t-il stable? Lorsque les conditions d'équilibre ne sont pas remplies, comment se déplacera-t-elle?

Nous supposerons, pour trouver les conditions d'équilibre d'une semblable masse, qu'elle soit soumise à des actions extérieures quelconques, et nous désignerons par X, Y, Z les composantes de la force extérieure qui a son point d'application en $x$, $y$, $z$.

Les conditions d'équilibre seront aisées à trouver. Pour exprimer qu'un état du système est un état d'équilibre, nous ferons subir à ce système une modification virtuelle quelconque, et, désignant par $\delta\mathfrak{F}$ la variation subie par le potentiel thermodynamique interne et par $\delta\mathfrak{T}$ le travail des forces extérieures, nous écrirons, conformément aux principes posés dans le Chapitre I,

$$\delta\mathfrak{F} = \delta\mathfrak{T}. \tag{1}$$

Les paramètres indépendants dont la variation constitue la modification virtuelle que nous avons à considérer sont les composantes $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ de la translation imprimée à la masse magnétique; les composantes $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ de la rotation imposée à la même masse; enfin les variations $\delta\mathfrak{A}$, $\delta\mathfrak{B}$, $\delta\mathfrak{C}$ que subissent en chaque point les composantes de l'aimantation.

D'après l'égalité (19) du Chapitre I, nous avons

$$\mathfrak{F} = \mathrm{E}(\mathrm{U} - \mathrm{TS}) + \Upsilon + \int \mathfrak{f}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\, dv; \tag{2}$$

d'où, puisque E(U — TS) demeure invariable dans la modification considérée,

$$\delta\mathcal{F} = \delta\mathfrak{F} + \int \delta\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\,dv. \tag{3}$$

D'après l'égalité (14) du Chapitre I, nous avons

$$\mathfrak{F} = \frac{h}{2}\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)dv$$

l'intégration s'étendant à tout le système.

Cette égalité peut se mettre sous une forme plus explicite. Désignons les aimants permanents par l'indice (1) et les masses dénuées de force coercitive par l'indice (2); par $\mathcal{W}_1$ la fonction potentielle des masses distribuées sur les aimants permanents en un point $(x_1, y_1, z_1)$ de ces aimants; par $\mathcal{W}_2$ la fonction potentielle des masses distribuées sur les corps dénués de force coercitive en un point $(x_2, y_2, z_2)$ de ces corps; par $\mathcal{V}_2$ la fonction potentielle des masses distribuées sur les aimants permanents en un point $(x_2, y_2, z_2)$ des corps dénués de force coercitive. Nous pourrons alors écrire

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F} = {} & \frac{h}{2}\int\left(\mathcal{A}_1\frac{\partial\mathcal{W}_1}{\partial x_1} + \mathcal{B}_1\frac{\partial\mathcal{W}_1}{\partial y_1} + \mathcal{C}_1\frac{\partial\mathcal{W}_1}{\partial z_1}\right)dv_1 \\
& + h\int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right)dv_2 \\
& + \frac{h}{2}\int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial z_2}\right)dv_2.
\end{aligned}$$

Cela posé, il est aisé de voir que l'égalité (3) deviendra

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{F} = {} & h\,\delta x\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial x^2} + \mathcal{B}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial z}\right)dv \\
& + h\,\delta y\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y^2} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial z}\right)dv \\
& + h\,\delta z\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z^2}\right)dv \\
& + h\,\delta\lambda\int\Bigg[\quad\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z^2}\right)y \\
& \qquad\qquad - \left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y^2} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial z}\right)z\Bigg]dv \\
& + h\,\delta\mu\int\Bigg[\quad\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial z}\right)z \\
& \qquad\qquad - \left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z^2}\right)x\Bigg]dv
\end{aligned} \tag{4}$$

$$+ h\,\delta\nu \int \left[ \left( \mathcal{A}\,\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial x} + \mathcal{B}\,\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y^2} + \mathcal{C}\,\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial z} \right) x - \left( \mathcal{A}\,\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x^2} + \mathcal{B}\,\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y} + \mathcal{C}\,\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial z} \right) y \right] dv$$

$$+ h \int \left[ \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial x}\,\delta\mathcal{A} + \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial y}\,\delta\mathcal{B} + \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial z}\,\delta\mathcal{C} \right] dv$$

$$+ \int \frac{1}{\mathfrak{M}}\,\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}}\,(\mathcal{A}\,\delta\mathcal{A} + \mathcal{B}\,\delta\mathcal{B} + \mathcal{C}\,\delta\mathcal{C})\,dv,$$

égalité dans laquelle toutes les intégrations se rapportent au corps dénué de force coercitive.

Le travail des forces extérieures a pour valeur

$$(5) \qquad \begin{aligned} \delta\mathfrak{T} = {} & \delta x\,\Sigma X + \delta y\,\Sigma Y + \delta z\,\Sigma Z \\ & + \delta\lambda\,\Sigma(Yz - Zy) - \delta\mu\,\Sigma(Zx - Xz) - \delta\nu\,\Sigma(Xy - Yx). \end{aligned}$$

Si l'on reporte ces expressions dans l'égalité (1) et si l'on écrit que cette égalité doit avoir lieu quels que soient $\delta x, \delta y, \delta z;\ \delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu;\ \delta\mathcal{A}, \delta\mathcal{B}, \delta\mathcal{C}$, on trouve, en premier lieu, les équations (2) du Chapitre I, qui déterminent la distribution magnétique sur les conducteurs devenus immobiles, et, en second lieu, les six équations suivantes :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} & h \int \left( \mathcal{A}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x^2} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial x} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial x} \right) dv = \Sigma X, \\ & h \int \left( \mathcal{A}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y^2} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial y} \right) dv = \Sigma Y, \\ & h \int \left( \mathcal{A}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial z} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial z} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z^2} \right) dv = \Sigma Z, \\ & h \int \left[ \left( \mathcal{A}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial z} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial z} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z^2} \right) y \right. \\ & \qquad \left. - \left( \mathcal{A}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y^2} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial y} \right) z \right] dv = \Sigma(Zy - Yz), \\ & h \int \left[ \left( \mathcal{A}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x^2} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial x} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial x} \right) z \right. \\ & \qquad \left. - \left( \mathcal{A}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial z} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial z} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z^2} \right) x \right] dv = \Sigma(Xz - Zx), \\ & h \int \left[ \left( \mathcal{A}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y^2} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial y} \right) x \right. \\ & \qquad \left. - \left( \mathcal{A}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x^2} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial x} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial x} \right) y \right] dv = \Sigma(Yx - Xy). \end{aligned} \right.$$

Ces dernières équations pourraient d'ailleurs s'établir directement en partant des résultats expérimentaux sur lesquels, au Chapitre I, nous avons fondé la détermination du potentiel thermodynamique d'un système qui renferme des aimants.

### § II. — L'état d'équilibre d'une masse magnétique en présence d'aimants permanents est-il un état d'équilibre stable?

2. Arrivons maintenant à la question principale que nous voulons examiner dans ce Chapitre; une masse magnétique étant mise en présence d'aimants permanents, sa position d'équilibre est fixée par les équations (6); cette position d'équilibre est-elle une position d'équilibre stable?

Pour discuter cette question, nous supposerons que les forces extérieures admettent un potentiel W. Dans ce cas, le système admettra un potentiel thermodynamique total $\Phi$, qui sera la somme du potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}$ et du potentiel des forces extérieures W

$$\Phi = \mathcal{F} + W.$$

Si, pour toutes les modifications virtuelles qui laissent invariables la forme du corps dénué de force coercitive et son état physique ou chimique, $\Phi$ subit une variation positive, le système est en état d'équilibre stable; la variation première de $\Phi$ étant identiquement nulle, puisque nous supposons réalisées les conditions indiquées au paragraphe précédent, nous sommes amenés à chercher si la variation seconde de $\Phi$

$$\delta^2\Phi = \delta^2\mathcal{F} + \delta^2 W$$

est positive.

Nous nous contenterons d'examiner le cas où les forces extérieures se réduisent :

1° A une pression normale et uniforme sur la surface du corps magnétique;

2° A une force constante en grandeur et en direction appliquée à chacun des éléments du corps magnétique.

C'est sensiblement le cas présenté par un corps magnétique placé dans l'air et soumis à l'action de la pesanteur.

De plus, nous commencerons par rechercher si $\delta^2\Phi$ est positif non pas pour toute modification virtuelle, mais seulement *pour toute translation*

*virtuelle*. Dans ces conditions, il n'est pas difficile de voir que

$$\delta^2 W = 0,$$

et que la question se ramène à chercher le signe de $\delta^2 \mathfrak{F}$.

Cette quantité a alors une expression très simple; elle se présente comme une forme homogène et du second ordre de $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ et cette forme est la suivante :

$$(7) \qquad \delta^2 \mathfrak{F} = h \Bigg[ \delta x^2 \int \left( \mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x^3} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y\, \partial x^2} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z\, \partial x^2} \right) dv$$

$$+ \delta y^2 \int \left( \mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x\, \partial y^2} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y^3} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z\, \partial y^2} \right) dv$$

$$+ \delta z^2 \int \left( \mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x\, \partial z^2} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y\, \partial z^2} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z_3} \right) dv$$

$$+ 2\, \delta y\, \delta z \int \left( \mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y^2\, \partial z} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z^2\, \partial y} \right) dv$$

$$+ 2\, \delta z\, \delta x \int \left( \mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x^2\, \partial z} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z^2\, \partial x} \right) dv$$

$$+ 2\, \delta x\, \delta y \int \left( \mathcal{A} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x^2\, \partial y} + \mathcal{B} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y^2\, \partial x} + \mathcal{C} \frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x\, \partial y\, \partial z} \right) dv \Bigg].$$

Avant d'étudier le signe de cette quantité, demandons-nous si elle peut être identiquement nulle.

L'égalité à o de tous les coefficients de cette forme a un sens très simple.

Imaginons la masse magnétique que nous considérons placée dans sa position d'équilibre; elle y prend une certaine aimantation; les aimants permanents en présence desquels elle se trouve exercent sur elle certaines actions réductibles à une force et à un couple; soient $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ les composantes de la force et R cette force. Les choses étant dans cet état, imaginons que nous fixions invariablement l'aimantation de la masse magnétique et que nous imprimions à cette masse une translation ayant pour composante $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ subiront certaines variations

$$\delta \mathcal{X} = \xi\, \delta x + \xi'\, \delta y + \xi''\, \delta z,$$
$$\delta \mathcal{Y} = \eta\, \delta x + \eta'\, \delta y + \eta''\, \delta z,$$
$$\delta \mathcal{Z} = \zeta\, \delta x + \zeta'\, \delta y + \zeta''\, \delta z.$$

Or il est aisé de voir que l'on a

$$\eta'' = \zeta',$$
$$\zeta = \xi'',$$
$$\xi' = \eta$$

et que l'égalité (7) peut s'écrire

$$-\delta^2 \mathcal{F} = \xi\,\delta x^2 + \eta'\,\delta y^2 + \zeta''\,\delta z^2 + (\zeta' + \eta'')\,\delta y\,\delta z + (\zeta + \xi'')\,\delta z\,\delta x + (\xi' + \eta)\,\delta x\,\delta y.$$

Si donc la quantité $\delta^2 \mathcal{F}$ est identiquement nulle, c'est que la force R ne varie ni en grandeur ni en direction dans cette translation.

Il peut arriver que ce cas se réalise; il serait réalisé, par exemple, si le champ engendré par les aimants permanents et dans lequel se trouve la masse magnétique était un champ magnétique uniforme. Toutefois le cas dont il s'agit est certainement très particulier.

Excluons maintenant ce cas de nos recherches, et supposons que la quantité $\delta^2 \mathcal{F}$ déterminée par l'égalité (7) ne soit pas identiquement nulle. Peut-il arriver qu'elle demeure toujours positive, quels que soient $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$? Il serait évidemment nécessaire, pour qu'il en fût ainsi, que les trois coefficients de $\delta x^2$, $\delta y^2$, $\delta z^2$ fussent tous les trois positifs. Or la somme de ces trois coefficients peut s'écrire

$$h \int \left( \mathcal{A} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \mathcal{V}_2 + \mathcal{B} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \mathcal{V}_2 + \mathcal{C} \frac{\partial}{\partial z} \Delta \mathcal{V}_2 \right) dv,$$

l'intégration s'étendant au volume entier de la masse dénuée de force coercitive.

Mais, en chaque point de cette masse, on a

$$\Delta \mathcal{V}_2 = 0,$$

puisque $\mathcal{V}_2$ est, en un point de cette masse, la fonction potentielle d'une aimantation qui lui est extérieure. On a donc aussi en tous ces points

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta \mathcal{V}_2 = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y} \Delta \mathcal{V}_2 = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z} \Delta \mathcal{V}_2 = 0.$$

La somme des coefficients de $\delta x^2$, $\delta y^2$, $\delta z^2$ étant identiquement nulle dans l'expression de $\delta^2 \mathcal{F}$, il existe certainement des translations virtuelles pour lesquelles $\delta^2 \mathcal{F}$ est négatif.

Dès lors nous pouvons énoncer la proposition suivante :

*Si l'on excepte un certain cas particulier qui comprend, comme cas encore plus particulier, celui où les aimants permanents engendreraient un champ uniforme, un corps magnétique ou diamagnétique, soumis à l'action d'aimants permanents, d'une pression extérieure normale et uniforme et de forces extérieures constantes en grandeur et en direction appliquées à chacun de ses éléments, ne peut prendre aucune position d'équilibre qui ne soit instable.*

3. Pour parvenir à la proposition précédente, nous avons regardé les rotations et translations imposées au corps solide d'une part et les variations imposées à l'aimantation d'autre part comme des paramètres que l'on pouvait faire varier d'une manière indépendante dans les modifications virtuelles et nous avons fait varier seulement les premiers. On peut se placer à un autre point de vue ; on peut admettre que sur la masse magnétique que l'on considère la distribution magnétique est à chaque instant la distribution d'équilibre pour la position que la masse occupe à cet instant. Les équations (2) du Chapitre I deviennent alors, pour les modifications virtuelles, des équations de *liaison*.

Ce point de vue, qui revient à regarder la vitesse avec laquelle s'établit l'équilibre magnétique sur un corps qui se déplace comme infinie par rapport à la vitesse de son déplacement, est évidemment plus restreint que le premier. Toutes les modifications virtuelles possibles dans les nouvelles conditions le sont dans les anciennes, mais la réciproque n'est pas vraie. Il pourrait donc se faire qu'un état d'équilibre instable au premier point de vue ne le fût plus au second ([1]).

Nous allons donc reprendre l'étude de la stabilité de l'équilibre en supposant que l'aimantation de la masse magnétique vérifie sans cesse les égalités

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A}_2 &= -h\,\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\,\frac{\partial(\mathcal{V}_2+\mathcal{W}_2)}{\partial x},\\ \mathcal{B}_2 &= -h\,\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\,\frac{\partial(\mathcal{V}_2+\mathcal{W}_2)}{\partial y},\\ \mathcal{C}_2 &= -h\,\mathrm{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\,\frac{\partial(\mathcal{V}_2+\mathcal{W}_2)}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

([1]) Cette distinction a déjà été indiquée, pour un corps électrisé très petit, par Maxwell, sous le nom de *théorème d'Earnshaw* (*Traité d'Électricité et de Magnétisme*, traduit par Seligmann-Lui, t. I, p. 182).

Pour que $\delta^2 \mathcal{F}$ soit positif pour tous les déplacements virtuels de la masse magnétique, il est nécessaire tout d'abord qu'il soit positif pour toutes les translations. Supposons donc que l'on ait

$$\delta\lambda = 0, \qquad \delta\mu = 0, \qquad \delta\nu = 0.$$

Le corps subissant la translation dont les composantes sont $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ pour que les équations (8) demeurent vérifiées, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ doivent varier de quantités que nous désignerons par $\delta'\mathcal{A}$, $\delta'\mathcal{B}$, $\delta'\mathcal{C}$. On a alors, en vertu de l'égalité (4),

$$(9)\quad \delta\mathcal{F} = h \left\{ \begin{aligned} & \delta x \int \left( \mathcal{A} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x^2} + \mathcal{B} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y\, \partial x} + \mathcal{C} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z\, \partial x} \right) dv \\ & + \delta y \int \left( \mathcal{A} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\, \partial y} + \mathcal{B} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y^2} + \mathcal{C} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z\, \partial y} \right) dv \\ & + \delta z \int \left( \mathcal{A} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\, \partial z} + \mathcal{B} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y\, \partial z} + \mathcal{C} \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z^2} \right) dv \\ & + \int \left[ \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial x} \delta'\mathcal{A} + \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial y} \delta'\mathcal{B} + \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial z} \delta'\mathcal{C} \right] dv \end{aligned} \right\}$$
$$+ \int \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}} (\mathcal{A}\,\delta'\mathcal{A} + \mathcal{B}\,\delta'\mathcal{B} + \mathcal{C}\,\delta'\mathcal{C})\, dv.$$

Les équations de l'équilibre magnétique doivent être vérifiées dans la position initiale du système. On sait que ces équations (8) signifient simplement que l'on a

$$(10)\quad h \int \left[ \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial x} \delta\mathcal{A} + \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial y} \delta\mathcal{B} + \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial z} \delta\mathcal{C} \right] dv$$
$$+ \int \frac{1}{\mathfrak{M}} \frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}} (\mathcal{A}\,\delta\mathcal{A} + \mathcal{B}\,\delta\mathcal{B} + \mathcal{C}\,\delta\mathcal{C})\, dv = 0,$$

quels que soient $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$.

Ces équations (8) doivent être encore vérifiées après que la masse magnétique a subi la translation $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ et que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont devenus $\mathcal{A} + \delta'\mathcal{A}$, $\mathcal{B} + \delta'\mathcal{B}$, $\mathcal{C} + \delta'\mathcal{C}$; en d'autres termes, cette modification doit faire éprouver au premier membre de l'égalité (10) une variation égale à 0, quels que soient $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$.

Cherchons l'expression de cette variation.

La quantité

$$h \int \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial x} \delta\mathcal{A} + \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial y} \delta\mathcal{B} + \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial z} \delta\mathcal{C} \right) dv$$



varie simplement de

$$h\Big[\quad \delta x \int \left( \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x^2}\, \delta\mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\, \partial y}\, \delta\mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z\, \partial x}\, \delta\mathcal{C} \right) dv$$
$$+ \delta y \int \left( \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\, \partial y}\, \delta\mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y^2}\, \delta\mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z\, \partial y}\, \delta\mathcal{C} \right) dv$$
$$+ \delta z \int \left( \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\, \partial z}\, \delta\mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y\, \partial z}\, \delta\mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z^2}\, \delta\mathcal{C} \right) dv \Big].$$

Pour trouver la variation de

$$h \int \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial x}\, \delta\mathcal{A} + \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial y}\, \delta\mathcal{B} + \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial z}\, \delta\mathcal{C} \right) dv,$$

nous devons nous souvenir de l'expression $\mathcal{W}_2$

$$\mathcal{W}_2 = \int \left( \mathcal{A}\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B}\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C}\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dv,$$

l'intégration s'étendant au volume entier du corps magnétique. Il sera alors évident que la variation de la quantité précédente a pour valeur

$$h \int \Big[\quad \delta\mathcal{A}\, \frac{\partial}{\partial x} \int \left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\, \delta'\mathcal{A}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}\, \delta'\mathcal{B}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\, \delta'\mathcal{C}' \right) dv'$$
$$+ \delta\mathcal{B}\, \frac{\partial}{\partial y} \int \left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\, \delta'\mathcal{A}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}\, \delta'\mathcal{B}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\, \delta'\mathcal{C}' \right) dv'$$
$$+ \delta\mathcal{C}\, \frac{\partial}{\partial z} \int \left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\, \delta'\mathcal{A}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}\, \delta'\mathcal{B}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\, \delta'\mathcal{C}' \right) dv' \Big]\, dv,$$

toutes les intégrations s'étendant au volume entier du corps magnétique.

Enfin, la quantité

$$\int \frac{1}{\mathcal{M}}\, \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathcal{M}}\, (\mathcal{A}\, \delta\mathcal{A} + \mathcal{B}\, \delta\mathcal{B} + \mathcal{C}\, \delta\mathcal{C})\, dv$$

subit, on le voit aisément, la variation

$$\int \frac{1}{\mathcal{M}}\, \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathcal{M}}\, (\delta\mathcal{A}\, \delta'\mathcal{A} + \delta\mathcal{B}\, \delta'\mathcal{B} + \delta\mathcal{C}\, \delta'\mathcal{C})\, dv$$
$$+ \int \frac{1}{\mathcal{M}}\, \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} \left[ \frac{1}{\mathcal{M}}\, \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathcal{M}} \right] (\mathcal{A}\, \delta\mathcal{A} + \mathcal{B}\, \delta\mathcal{B} + \mathcal{C}\, \delta\mathcal{C})$$
$$(\mathcal{A}\, \delta'\mathcal{A} + \mathcal{B}\, \delta'\mathcal{B} + \mathcal{C}\, \delta'\mathcal{C})\, dv.$$

Ainsi donc, en égalant à o la variation du premier membre de l'égalité (10), on trouve

$$
\begin{aligned}
(11)\quad h\Bigg\{ & \delta x \int \left( \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x^2}\,\delta\mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial x}\,\delta\mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial x}\,\delta\mathcal{C} \right) dv \\
& + \delta y \int \left( \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y}\,\delta\mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y^2}\,\delta\mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y}\,\delta\mathcal{C} \right) dv \\
& + \delta z \int \left( \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial z}\,\delta\mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial z}\,\delta\mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z^2}\,\delta\mathcal{C} \right) dv \\
& + \int \Bigg[ \quad \delta\mathcal{A}\,\frac{\partial}{\partial x} \int \left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\,\delta'\mathcal{A}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}\,\delta'\mathcal{B}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\,\delta'\mathcal{C}' \right) dv' \\
& \qquad + \delta\mathcal{B}\,\frac{\partial}{\partial y} \int \left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\,\delta'\mathcal{A}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}\,\delta'\mathcal{B}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\,\delta'\mathcal{C} \right) dv' \\
& \qquad + \delta\mathcal{C}\,\frac{\partial}{\partial z} \int \left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'}\,\delta'\mathcal{A}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'}\,\delta'\mathcal{B}' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'}\,\delta'\mathcal{C} \right) dv' \Bigg] dv \Bigg\} \\
& + \int \frac{1}{\mathfrak{M}}\,\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}}\,(\delta\mathcal{A}\,\delta'\mathcal{A} + \delta\mathcal{B}\,\delta'\mathcal{B} + \delta\mathcal{C}\,\delta'\mathcal{C})\,dv \\
& + \int \frac{1}{\mathfrak{M}}\,\frac{\partial}{\partial \mathfrak{M}} \left[ \frac{1}{\mathfrak{M}}\,\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}} \right] (\mathcal{A}\,\delta\mathcal{A} + \mathcal{B}\,\delta\mathcal{B} + \mathcal{C}\,\delta\mathcal{C}) \\
& \qquad\qquad (\mathcal{A}\,\delta'\mathcal{A} + \mathcal{B}\,\delta'\mathcal{B} + \mathcal{C}\,\delta'\mathcal{C})\,dv = 0.
\end{aligned}
$$

Dans cette égalité, toutes les intégrations sont étendues au corps magnétique tout entier; *les quantités $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$ sont arbitraires, tandis que les quantités $\delta'\mathcal{A}$, $\delta'\mathcal{B}$, $\delta'\mathcal{C}$ sont des fonctions déterminées de $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$.*

Après avoir donné au corps magnétique une translation $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ qui faisait varier $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de $\delta'\mathcal{A}$, $\delta'\mathcal{B}$, $\delta'\mathcal{C}$ et $\mathfrak{F}$ de la quantité $\delta\mathfrak{F}$ donnée par l'égalité (9), imprimons une seconde fois à ce corps la translation $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$; $\delta'\mathcal{A}$, $\delta'\mathcal{B}$, $\delta'\mathcal{C}$ vont varier de $\delta'^2\mathcal{A}$, $\delta'^2\mathcal{B}$, $\delta'^2\mathcal{C}$ et $\delta\mathfrak{F}$ va varier de $\delta^2\mathfrak{F}$. Proposons-nous de calculer $\delta^2\mathfrak{F}$, d'après l'expression (9) de $\delta\mathfrak{F}$.

La quantité

$$
\begin{aligned}
h\Bigg[ \quad & \delta x \int \left( \mathcal{A}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x^2} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial x} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial x} \right) dv \\
& + \delta y \int \left( \mathcal{A}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y^2} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial y} \right) dv \\
& + \delta z \int \left( \mathcal{A}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial z} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial z} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z^2} \right) dv \Bigg]
\end{aligned}
$$

va subir la variation

$$h\Big[\quad \delta x^2 \int\left(\mathcal{A}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x^3}+\mathcal{B}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial x^2}+\mathcal{C}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial x^2}\right)dv$$
$$+\,\delta y^2 \int\left(\mathcal{A}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y^2}+\mathcal{B}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial y^3}+\mathcal{C}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial y^2}\right)dv$$
$$+\,\delta z^2 \int\left(\mathcal{A}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial z^2}+\mathcal{B}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial z^2}+\mathcal{C}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial z^3}\right)dv$$
$$+\,2\,\delta y\,\delta z \int\left(\mathcal{A}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y\,\partial z}+\mathcal{B}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial y^2\,\partial z}+\mathcal{C}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial z^2\,\partial y}\right)dv$$
$$+\,2\,\delta z\,\delta x \int\left(\mathcal{A}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x^2\,\partial z}+\mathcal{B}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y\,\partial z}+\mathcal{C}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial z^2\,\partial x}\right)dv$$
$$+\,2\,\delta x\,\delta y \int\left(\mathcal{A}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x^2\,\partial y}+\mathcal{B}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial y^2\,\partial x}+\mathcal{C}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\right)dv$$
$$+\,\delta x \int\left(\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial x^2}\,\delta'\mathcal{A}+\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial x}\,\delta'\mathcal{B}+\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial x}\,\delta'\mathcal{C}\right)dv$$
$$+\,\delta y \int\left(\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y}\,\delta'\mathcal{A}+\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial y^2}\,\delta'\mathcal{B}+\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial y}\,\delta'\mathcal{C}\right)dv$$
$$+\,\delta z \int\left(\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial z}\,\delta'\mathcal{A}+\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial z}\,\delta'\mathcal{B}+\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial z^2}\,\delta'\mathcal{C}\right)dv\Big].$$

La quantité

$$h\int\left(\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x}\,\delta'\mathcal{A}+\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y}\,\delta'\mathcal{B}+\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z}\,\delta'\mathcal{C}\right)dv$$

subit une variation

$$h\Big[\quad \delta x \int\left(\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial x^2}\,\delta'\mathcal{A}+\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial x}\,\delta'\mathcal{B}+\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial x}\,\delta'\mathcal{C}\right)dv$$
$$+\,\delta y \int\left(\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y}\,\delta'\mathcal{A}+\frac{\partial^2\mathcal{V}_1}{\partial y^2}\,\delta'\mathcal{B}+\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial y}\,\delta'\mathcal{C}\right)dv$$
$$+\,\delta z \int\left(\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial z}\,\delta'\mathcal{A}+\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial z}\,\delta'\mathcal{B}+\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial z^2}\,\delta'\mathcal{C}\right)dv$$
$$+\int\left(\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x}\,\delta'^2\mathcal{A}+\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y}\,\delta'^2\mathcal{B}+\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z}\,\delta'^2\mathcal{C}\right)dv\Big].$$

La quantité

$$h\int\left(\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial x}\,\delta'\mathcal{A}+\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial y}\,\delta'\mathcal{B}+\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial z}\,\delta'\mathcal{C}\right)dv$$

subit une variation

$$h\int\Bigg[\quad \delta'\mathcal{A}\frac{\partial}{\partial x}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\delta'\mathcal{A}'+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}\delta'\mathcal{B}'+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\delta'\mathcal{C}'\right)dv'$$
$$+\delta'\mathcal{B}\frac{\partial}{\partial y}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\delta'\mathcal{A}'+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}\delta'\mathcal{B}'+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\delta'\mathcal{C}'\right)dv'$$
$$+\delta'\mathcal{C}\frac{\partial}{\partial z}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\delta'\mathcal{A}'+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}\delta'\mathcal{B}'+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\delta'\mathcal{C}'\right)dv'\Bigg]dv$$
$$+h\int\left(\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x}\delta'\mathcal{A}+\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y}\delta'\mathcal{B}+\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z}\delta'\mathcal{C}\right)dv.$$

Enfin la quantité

$$\int\frac{1}{\mathfrak{M}}\frac{\partial\mathcal{F}_2(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)}{\partial\mathfrak{M}}(\mathcal{A}\,\delta'\mathcal{A}+\mathcal{B}\,\delta'\mathcal{B}+\mathcal{C}\,\delta'\mathcal{C})\,dv$$

subit la variation

$$\int\frac{1}{\mathfrak{M}}\frac{\partial\mathcal{F}_2(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)}{\partial\mathfrak{M}}[(\delta'\mathcal{A})^2+(\delta'\mathcal{B})^2+(\delta'\mathcal{C})^2]\,dv$$
$$+\int\frac{1}{\mathfrak{M}}\frac{\partial\mathcal{F}_2(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)}{\partial\mathfrak{M}}[\mathcal{A}\,\delta'^2\mathcal{A}+\mathcal{B}\,\delta'^2\mathcal{B}+\mathcal{C}\,\delta'^2\mathcal{C}]\,dv$$
$$+\int\frac{1}{\mathfrak{M}}\frac{\partial}{\partial\mathfrak{M}}\left[\frac{1}{\mathfrak{M}}\frac{\partial\mathcal{F}_2(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)}{\partial\mathfrak{M}}\right](\mathcal{A}\,\delta'\mathcal{A}+\mathcal{B}\,\delta'\mathcal{B}+\mathcal{C}\,\delta'\mathcal{C})^2\,dv.$$

Nous avons obtenu ainsi les variations subies par les divers termes de $\delta\mathcal{F}$. En les réunissant dans un ordre convenablement choisi, nous arrivons à la formule suivante :

(12) $$\delta^2\mathcal{F}=h\Bigg[\quad\delta x^2\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x^3}+\mathcal{B}\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial x^2}+\mathcal{C}\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial x^2}\right)dv \qquad (1)$$
$$+\delta y^2\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y^2}+\mathcal{B}\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial y^3}+\mathcal{C}\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial y^2}\right)dv \qquad (2)$$
$$+\delta z^2\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial z^2}+\mathcal{B}\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial z^2}+\mathcal{C}\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial z^3}\right)dv \qquad (3)$$
$$+2\,\delta y\,\delta z\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y\,\partial z}+\mathcal{B}\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial y^2\,\partial z}+\mathcal{C}\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial z^2\,\partial y}\right)dv \qquad (4)$$

$$+ 2\,\delta z\,\delta x \int\left(\mathcal{A}\,\frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x^2\,\partial z} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial z^2\,\partial x}\right) dv \qquad (5)$$

$$+ 2\,\delta x\,\delta y \int\left(\mathcal{A}\,\frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x^2\,\partial y} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial y^2\,\partial x} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^3 \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\right) dv\Bigg] \qquad (6)$$

$$+ \int\Bigg\{ \left[h\,\frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial x} + \frac{\mathcal{A}}{\mathfrak{M}}\,\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\mathfrak{M}}\right]\delta'^2\mathcal{A} \qquad (7)$$

$$+ \left[h\,\frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial y} + \frac{\mathcal{B}}{\mathfrak{M}}\,\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\mathfrak{M}}\right]\delta'^2\mathcal{B} \qquad (8)$$

$$+ \left[h\,\frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial z} + \frac{\mathcal{C}}{\mathfrak{M}}\,\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\mathfrak{M}}\right]\delta'^2\mathcal{C}\Bigg\} dv \qquad (9)$$

$$+ h\Bigg\{ \delta x \int\left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x^2}\,\delta'\mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial x}\,\delta'\mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial x}\,\delta'\mathcal{C}\right) dv \qquad (10)$$

$$+ \delta y \int\left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y}\,\delta'\mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y^2}\,\delta'\mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial y}\,\delta'\mathcal{C}\right) dv \qquad (11)$$

$$+ \delta z \int\left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial z}\,\delta'\mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial z}\,\delta'\mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z^2}\,\delta'\mathcal{C}\right) dv \qquad (12)$$

$$- h \int\Bigg[ \delta'\mathcal{A}\,\frac{\partial}{\partial x}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\,\delta'\mathcal{A}' + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}\,\delta'\mathcal{B}' + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\,\delta'\mathcal{C}'\right) dv' \qquad (13)$$

$$+ \delta'\mathcal{B}\,\frac{\partial}{\partial y}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\,\delta'\mathcal{A}' + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}\,\delta'\mathcal{B}' + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\,\delta'\mathcal{C}'\right) dv' \qquad (14)$$

$$+ \delta'\mathcal{C}\,\frac{\partial}{\partial z}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\,\delta'\mathcal{A}' + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}\,\delta'\mathcal{B}' + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\,\delta'\mathcal{C}'\right) dv'\Bigg] dv\Bigg\} \qquad (15)$$

$$+ \int \frac{1}{\mathfrak{M}}\,\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\mathfrak{M}}\left[(\delta'\mathcal{A})^2 + (\delta'\mathcal{B})^2 + (\delta'\mathcal{C})^2\right] dv \qquad (16)$$

$$+ \int \frac{1}{\mathfrak{M}}\,\frac{\partial}{\partial\mathfrak{M}}\left[\frac{1}{\mathfrak{M}}\,\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\mathfrak{M}}\right](\mathcal{A}\,\delta'\mathcal{A} + \mathcal{B}\,\delta'\mathcal{B} + \mathcal{C}\,\delta'\mathcal{C})^2\, dv \qquad (17)$$

$$- h\Bigg[ \delta x \int\left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x^2}\,\delta'\mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial x}\,\delta'\mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial x}\,\delta'\mathcal{C}\right) dv \qquad (18)$$

$$+ \delta y \int\left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y}\,\delta'\mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y^2}\,\delta'\mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial y}\,\delta'\mathcal{C}\right) dv \qquad (19)$$

$$+ \delta z \int\left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial z}\,\delta'\mathcal{A} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial z}\,\delta'\mathcal{B} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z^2}\,\delta'\mathcal{C}\right) dv\Bigg]. \qquad (20)$$

Cette égalité, passablement compliquée en apparence, va pouvoir se mettre sous une forme qui nous donnera une interprétation immédiate de la quantité $\delta^2\mathcal{F}$.

Conservons leur forme aux termes des lignes (1), (2), (3), (4), (5) et (6).

Si l'on observe que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ doivent vérifier les équations (8) et si, dans ces équations, on remplace $\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ par sa valeur

$$\frac{\mathfrak{M}}{\dfrac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial \mathfrak{M}}},$$

on verra sans peine que les termes qui occupent les lignes (7), (8) et (9) s'évanouissent.

L'égalité (11) doit avoir lieu quels que soient $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$. Elle aura donc lieu, en particulier, si l'on y fait

$$\delta\mathcal{A} = \delta'\mathcal{A}, \qquad \delta\mathcal{B} = \delta'\mathcal{B}, \qquad \delta\mathcal{C} = \delta'\mathcal{C}.$$

Son premier membre devient alors identique à l'ensemble des termes qui, dans l'égalité (12) occupent les lignes (10), (11), (12), (13), (14), (15), (16) et (17). L'ensemble de tous ces termes est donc égal à 0.

Quant aux termes qui occupent les lignes (18), (19) et (20), ils sont identiques aux termes qui occupent les lignes (10), (11), (12). Ce que nous venons de dire permet donc de remplacer les termes des lignes (18), (19) et (20) par l'ensemble *changé de signe* des termes des lignes (13), (14), (15), (16) et (17). Nous avons alors

$$
\begin{aligned}
(13)\quad \delta^2\mathcal{F} = h\Big[\ & \delta x^2 \int\left(\mathcal{A}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x^3} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial x^2} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial x^2}\right)dv & (1)\\
&+ \delta y^2 \int\left(\mathcal{A}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y^2} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial y^3} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial y^2}\right)dv & (2)\\
&+ \delta z^2 \int\left(\mathcal{A}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial z^2} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial z^2} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial z^3}\right)dv & (3)\\
&+ 2\,\delta y\,\delta z \int\left(\mathcal{A}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial y^2} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial z^2}\right)dv & (4)\\
&+ 2\,\delta z\,\delta x \int\left(\mathcal{A}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x^2\,\partial z} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial z^2}\right)dv & (5)\\
&+ 2\,\delta x\,\delta y \int\left(\mathcal{A}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial x^2} + \mathcal{B}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial y^2\,\partial x} + \mathcal{C}\,\frac{\partial^3\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\right)dv\Big] & (6)
\end{aligned}
$$

$$-k\int\Big[\delta'\mathcal{A}\frac{\partial}{\partial x}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\delta'\mathcal{A}'+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}\delta'\mathcal{B}'+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\delta'\mathcal{C}'\right)dv' \qquad (7)$$

$$+\delta'\mathcal{B}\frac{\partial}{\partial y}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\delta'\mathcal{A}'+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}\delta'\mathcal{B}'+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\delta'\mathcal{C}'\right)dv' \qquad (8)$$

$$+\delta'\mathcal{C}\frac{\partial}{\partial z}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\delta'\mathcal{A}'+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}\delta'\mathcal{B}'+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\delta'\mathcal{C}'\right)dv'\Big]dv \qquad (9)$$

$$-\int\frac{1}{\mathcal{M}}\frac{\partial\mathcal{F}(\mathcal{M},\alpha,\beta,\ldots)}{\partial\mathcal{M}}\left[(\delta'\mathcal{A})^2+(\delta'\mathcal{B})^2+(\delta'\mathcal{C})^2\right]dv \qquad (10)$$

$$-\int\frac{1}{\mathcal{M}}\frac{\partial}{\partial\mathcal{M}}\left|\frac{1}{\mathcal{M}}\frac{\partial\mathcal{F}(\mathcal{M},\alpha,\beta,\ldots)}{\partial\mathcal{M}}\right|(\mathcal{A}\delta'\mathcal{A}+\mathcal{B}\delta'\mathcal{B}+\mathcal{C}\delta'\mathcal{C})^2\,dv. \qquad (11)$$

Nous avons dit que cette forme simplifiée de $\delta^2\mathcal{F}$ se prêtait à une interprétation très simple.

Imaginons en premier lieu que, le corps étant placé dans sa position d'équilibre et y ayant pris l'aimantation d'équilibre, on rende son magnétisme rigide, puis qu'on lui imprime deux fois de suite une translation quelconque $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$; $\mathcal{F}$ aura une certaine variation seconde que nous désignerons par $\delta_1^2\mathcal{F}$.

Imaginons, en second lieu, que, le même corps étant placé dans la même position d'équilibre et y ayant de même pris l'aimantation d'équilibre, on maintienne ce corps immobile et que l'on fasse subir à l'aimantation, en chaque point, deux fois de suite des variations précisément égales à $\delta'\mathcal{A}$, $\delta'\mathcal{B}$, $\delta'\mathcal{C}$; $\mathcal{F}$ subira une variation seconde que nous désignerons par $\delta_2^2\mathcal{F}$.

Or il est aisé de voir que l'ensemble des termes qui, dans l'égalité (13), occupent les lignes (1), (2), (3), (4), (5) et (6) forment l'expression de $\delta_1^2\mathcal{F}$, tandis que l'ensemble des termes qui occupent les lignes (7), (8), (9), (10) et (11) forment l'expression *changée de signe de* $\delta_2^2\mathcal{F}$. On a, par conséquent,

$$\delta^2\mathcal{F}=\delta_1^2\mathcal{F}-\delta_2^2\mathcal{F}. \qquad (14)$$

Les conséquences de cette égalité si simple sont maintenant faciles à tirer.

Supposons que le corps, étant maintenu dans la position d'équilibre considéré, se recouvre d'une distribution magnétique qui demeure stable pour cette position du corps. Dans ces conditions, si l'on fait subir deux fois de suite à l'aimantation en chaque point une variation quelconque $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$,

$\delta\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$ subira une variation seconde positive. Il en sera ainsi en particulier pour la variation seconde $\delta_2^2\mathfrak{F}$ correspondant au cas où l'on fait $\delta\mathfrak{A} = \delta'\mathfrak{A}$, $\delta\mathfrak{B} = \delta'\mathfrak{B}$ et $\delta\mathfrak{C} = \delta'\mathfrak{C}$.

La quantité $-\delta_2^2\mathfrak{F}$ sera donc une quantité toujours négative. D'autre part, nous savons que la quantité $\delta_1^2\mathfrak{F}$ est, ou bien identiquement nulle, ou bien positive pour certaines translations et négative pour d'autres. Donc il existe assurément des translations pour lesquelles la quantité $\delta_1^2\mathfrak{F}$ est négative, et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

*S'il existe une position d'équilibre pour une masse magnétique ou diamagnétique quelconque, soumise à l'action d'aimants permanents, d'une pression normale et uniforme aux divers points de sa surface et d'une force constante en grandeur et en direction agissant sur ses divers éléments, et si de plus l'aimantation de cette masse demeure stable lorsqu'on maintient cette masse dans cette position, l'équilibre de cette masse est un équilibre instable.*

Ainsi, si l'on regarde l'aimantation d'un corps comme liée à chaque instant à sa position par les équations de l'aimantation par influence, il n'existe pas de moyen de réaliser, par des aimants, l'équilibre d'un corps magnétique ou diamagnétique soumis à l'action de la pesanteur et à la pression atmosphérique.

## § III. — Sur une loi de Faraday.

4. Il n'est peut-être pas inutile d'insister sur ce que le résultat précédent ([1]) présente de paradoxal. Il pourrait sembler au premier abord que la deuxième manière d'envisager la stabilité de l'équilibre d'un corps placé dans un champ magnétique, en astreignant tout déplacement virtuel du corps à produire une perturbation au sein d'une distribution magnétique stable, doit augmenter les chances de stabilité du système. On voit au contraire que cette circonstance diminue la stabilité du système, puisqu'elle diminue la variation seconde du potentiel thermodynamique précisément de la quantité qui constituerait cette variation seconde si l'on dérangeait l'aimantation du corps sans déranger sa position.

---

([1]) Ce résultat avait déjà été obtenu par Maxwell pour un corps électrisé infiniment petit (*Traité d'Électricité et de Magnétisme*, trad. par Seligmann-Lui, t. I, p. 181).

Cette remarque fait comprendre combien il était nécessaire de traiter le problème précédent par des raisonnements entièrement rigoureux; il suffit, pour s'en convaincre, de comparer les conclusions précédentes à celles que Sir W. Thomson a cru pouvoir énoncer sans démonstration :

« Dans le Mémoire que j'ai publié dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, dit Sir W. Thomson (¹), j'ai indiqué qu'une petite sphère d'une substance ferromagnétique ou diamagnétique placée au voisinage d'aimants et soustraite à l'action de toute force non magnétique était en équilibre lorsqu'elle se trouvait en un point où la *force résultante* (que je désignais par R) était maximum, ou minimum, ou avait une valeur *stationnaire;* je disais de plus que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une petite sphère diamagnétique soit en équilibre stable est que la force R soit minima en valeur absolue; enfin, j'ajontais : « S'il existe un » point extérieur aux aimants où la force résultante ait une valeur maxima, » ce point est une position d'équilibre stable pour une sphère infiniment » petite de fer doux, et toute autre position est nécessairement instable. »

» Postérieurement à la publication de ce Mémoire, j'ai réussi à prouver que la force résultante ne pouvait avoir aucun maximum absolu en un point extérieur à l'aimant et que, par conséquent, il ne pouvait exister de position d'équilibre stable pour une sphère ferromagnétique infiniment petite parfaitement libre de toute liaison. J'ai trouvé tout récemment qu'il existait des points où la force résultante avait un minimum absolu différent de zéro, et, par conséquent, qu'il existait pour une sphère diamagnétique des positions d'équilibre stable non comprises dans le cas où la force s'évanouit, cas noté dans le Mémoire en question. Ce cas offre l'exemple le plus simple de ce fait extraordinaire présenté par un corps solide qui, repoussé par des aimants, se trouve en équilibre stable. Par exemple, fixons deux barreaux aimantés au voisinage l'un de l'autre, leurs pôles de même nom en regard; il y aura évidemment entre ces deux pôles un point où la force résultante sera nulle; une petite sphère diamagnétique placée dans une position quelconque suffisamment voisine de ce point serait repoussée. Il apparait bien aisément qu'une sphère infiniment petite d'une substance diamagnétique

(¹) Sir W. Thomson, *Remarks on the forces experienced by inductively magnetized ferromagnetic or diamagnetic non-crystalline substances* (*Philosophical Magazine*, 1850. — *Reprint of papers on electrostatics and magnetism*, 1re édit., p. 508; 2e édit., p. 514).

soumise à l'action de la pesanteur, sans aucun support ni soutien, serait en équilibre stable un peu au-dessous de cette position, pourvu seulement que les aimants soient assez puissants.

» Il est toutefois extrêmement improbable qu'un essai pour réaliser cette expérience soit couronné de succès; car, même dans les cas les plus favorables, on n'a jamais obtenu une répulsion diamagnétique d'un solide qui approchât en grandeur du poids du corps. Toutefois nous pouvons considérer comme obtenue la véritable solution théorique du célèbre problème suggéré par le cercueil de Mahomet, et ce n'est pas la moins curieuse parmi les conséquences des découvertes de Faraday .»

Il est aisé de voir où se trouvent les points inexacts de la déduction de Sir W. Thomson.

Il est facile d'abord de vérifier l'exactitude de cette proposition qu'il a énoncée et dont il n'a point publié de démonstration :

*La valeur absolue de la force résultante* R *en un point d'un champ magnétique ne peut présenter de maximum, mais elle peut être minimum.*

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'en prouver l'exactitude pour le carré $R^2$ de la force résultante.

Soit $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique en un point du champ.

Nous avons

$$R^2 = h^2\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right].$$

De là nous déduisons

$$\frac{\partial R^2}{\partial x} = 2h^2\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial z\,\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial y} = 2h^2\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial z\,\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial z} = 2h^2\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial z^2}\right).$$

Calculons la variation seconde de $R^2$. Nous aurons

$$\delta^2 R^2 = A\,\delta x^2 + B\,\delta y^2 + C\,\delta z^2 + 2D\,\delta y\,\delta z + 2E\,\delta z\,\delta x + 2F\,\delta x\,\delta y,$$

égalité dans laquelle

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} = {} & \quad 2h^2\left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial y\,\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial z\,\partial x}\right)^2\right] \\
& + 2h^2\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial^3\mathcal{V}}{\partial x^3} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial^3\mathcal{V}}{\partial y\,\partial x^2} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial^3\mathcal{V}}{\partial z\,\partial x^2}\right), \\
\mathrm{B} = {} & \quad 2h^2\left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial z\,\partial y}\right)^2\right] \\
& + 2h^2\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial^3\mathcal{V}}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial^3\mathcal{V}}{\partial y^3} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial^3\mathcal{V}}{\partial z\,\partial y^2}\right), \\
\mathrm{C} = {} & \quad 2h^2\left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x\,\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial y\,\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial z^2}\right)^2\right] \\
& + 2h^2\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial^3\mathcal{V}}{\partial x\,\partial z^2} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial^3\mathcal{V}}{\partial y\,\partial z^2} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial^3\mathcal{V}}{\partial z^3}\right), \\
\mathrm{D} = {} & \quad 2h^2\left[\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial z^2}\right)\right] \\
& + 2h^2\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial^3\mathcal{V}}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial^3\mathcal{V}}{\partial y^2\,\partial z} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial^3\mathcal{V}}{\partial z^2\,\partial y}\right), \\
\mathrm{E} = {} & \quad 2h^2\left[\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial z\,\partial x}\left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x^2}\right)\right] \\
& + 2h^2\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial^3\mathcal{V}}{\partial x^2\,\partial z} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial^3\mathcal{V}}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial^3\mathcal{V}}{\partial z^2\,\partial x}\right), \\
\mathrm{F} = {} & \quad 2h^2\left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial z\,\partial y} + \frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial y^2}\right)\right] \\
& + 2h^2\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\frac{\partial^3\mathcal{V}}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\frac{\partial^3\mathcal{V}}{\partial y^2\,\partial x} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\frac{\partial^3\mathcal{V}}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\right).
\end{aligned}$$

Peut-il se faire qu'en un point du champ la quantité $\delta^2\mathrm{R}^2$ soit négative pour tous les déplacements virtuels possibles $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$? Pour cela, il serait nécessaire, en premier lieu, que l'on eût

$$\mathrm{A} < 0, \qquad \mathrm{B} < 0, \qquad \mathrm{C} < 0$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} < 0.$$

Or on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = {} & \quad 2h^2\left[\left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial z^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial z\,\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x\,\partial z}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\mathcal{V}}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] \\
& + 2h^2\left[\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\Delta\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right) + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\Delta\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right) + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\Delta\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)\right].
\end{aligned}$$

Mais, en tout point du champ, on a

$$\Delta\mathcal{V} = 0$$

et, par conséquent,

$$\Delta\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\Delta\mathcal{V} = 0,$$

$$\Delta\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\Delta\mathcal{V} = 0,$$

$$\Delta\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\Delta\mathcal{V} = 0.$$

La quantité A + B + C se réduit donc à une somme de carrés et ne peut jamais être négative. Il est donc bien démontré que la valeur absolue de la force ne peut jamais, dans un champ magnétique, présenter de maximum. Elle peut au contraire présenter des minima; Sir W. Thomson en a donné un exemple dans le passage que nous citions tout à l'heure.

**5.** La proposition énoncée par Sir W. Thomson sur la possibilité des maxima ou des minima de la valeur absolue de la force en un point d'un champ magnétique étant démontrée vraie, l'explication de la contradiction entre les résultats auxquels il est parvenu relativement à la stabilité de l'équilibre d'une masse diamagnétique en présence d'aimants permanents et ceux que nous avons obtenus doit être cherchée dans l'examen de la loi sur laquelle il fait reposer son analyse.

Cette loi, énoncée par Faraday, puis précisée et démontrée par Sir W. Thomson, est la suivante :

*Un corps magnétique très petit placé sans vitesse initiale dans un champ magnétique se déplace dans un sens tel que la valeur absolue de la force du champ soit plus grande au point où il se rend qu'au point où il se trouvait; l'inverse a lieu pour un corps diamagnétique.*

Si cette loi était exacte, la proposition de Sir W. Thomson sur la stabilité de l'équilibre d'une masse diamagnétique en présence d'aimants permanents en résulterait nécessairement. Comme nous avons vu directement que cette proposition ne pouvait être exacte, la loi de Faraday ne peut l'être non plus. Examinons donc en quel point pèche la démonstration qui en est donnée.

Pour que le petit corps considéré puisse subir une translation $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$,

durant laquelle les composantes de l'aimantation varient de $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$, il faut que le potentiel thermodynamique diminue durant l'accomplissement de cette modification.

Or la variation du potentiel thermodynamique a pour valeur

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{F} = \;& h\,\delta x \int \left( \mathcal{A}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x_2^2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y_2\, \partial x_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z_2\, \partial x_2} \right) dv_2 \\
& + h\,\delta y \int \left( \mathcal{A}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x_2\, \partial y_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y_2^2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z_2\, \partial y_2} \right) dv_2 \\
& + h\,\delta z \int \left( \mathcal{A}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial x_2\, \partial z_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial y_2\, \partial z_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial z_2^2} \right) dv_2 \\
& + h \int \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} (\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)\, \delta\mathcal{A}_2 + \frac{\partial}{\partial y_2} (\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)\, \delta\mathcal{B}_2 + \frac{\partial}{\partial z_2} (\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)\, \delta\mathcal{C}_2 \right] dv_2 \\
& + \int \frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{d\mathfrak{F}(\mathfrak{M}_2)}{d\mathfrak{M}_2} (\mathcal{A}_2\, \delta\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}_2\, \delta\mathcal{B}_2 + \mathcal{C}_2\, \delta\mathcal{C}_2)\, dv_2.
\end{aligned}$$

Mais, l'équilibre magnétique étant établi sur le corps, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{d\mathfrak{F}(\mathfrak{M}_2)}{d\mathfrak{M}_2}\, \mathcal{A}_2 + h \frac{\partial}{\partial x_2} (\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2) = 0, \\
\frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{d\mathfrak{F}(\mathfrak{M}_2)}{d\mathfrak{M}_2}\, \mathcal{B}_2 + h \frac{\partial}{\partial y_2} (\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2) = 0, \\
\frac{1}{\mathfrak{M}_2} \frac{d\mathfrak{F}(\mathfrak{M}_2)}{d\mathfrak{M}_2}\, \mathcal{C}_2 + h \frac{\partial}{\partial z_2} (\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2) = 0,
\end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 &= -h\, F(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial}{\partial x_2} (\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2), \\
\mathcal{B}_2 &= -h\, F(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial}{\partial y_2} (\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2), \\
\mathcal{C}_2 &= -h\, F(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial}{\partial z_2} (\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2).
\end{aligned}$$

Moyennant ces diverses égalités, l'égalité précédente devient



$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{F} = &-\frac{1}{2}h\,\delta x\int F(\mathfrak{M}_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right)^2\right]dv_2\\ &-\frac{1}{2}h\,\delta y\int F(\mathfrak{M}_2)\frac{\partial}{\partial y_2}\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right)^2\right]dv_2\\ &-\frac{1}{2}h\,\delta z\int F(\mathfrak{M}_2)\frac{\partial}{\partial z_2}\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right)^2\right]dv_2\\ &-h\,\delta x\int F(\mathfrak{M}_2)\left(\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial x_2}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial y_2}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial y_2\,\partial x_2}+\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial z_2}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial z_2\,\partial x_2}\right)dv_2\\ &-h\,\delta y\int F(\mathfrak{M}_2)\left(\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial x_2}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial x_2\,\partial y_2}+\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial y_2}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial y_2^2}+\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial z_2}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial z_2\,\partial y_2}\right)dv_2\\ &-h\,\delta z\int F(\mathfrak{M}_2)\left(\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial x_2}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial x_2\,\partial z_2}+\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial y_2}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial y_2\,\partial z_2}+\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial z_2}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial z_2^2}\right)dv_2.\end{aligned}$$

Le corps est jusqu'ici de forme quelconque. Supposons-le infiniment petit. Soit R la force au point $(x_2, y_2, z_2)$ du champ où il se trouve placé. Nous aurons

$$R^2 = h^2\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right]$$

et par conséquent l'égalité précédente deviendra

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{F} = &-\frac{F(\mathfrak{M}_2)}{2h}\left(\frac{\partial R^2}{\partial x_2}\delta x+\frac{\partial R^2}{\partial y_2}\delta y+\frac{\partial R^2}{\partial z_2}\delta z\right)dv_2\\ &-h\int F(\mathfrak{M}_2)\Bigg[\;\delta x\left(\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial x_2}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial y_2}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial y_2\,\partial x_2}+\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial z_2}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial z_2\,\partial x_2}\right)\\ &\qquad+\delta y\left(\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial x_2}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial x_2\,\partial y_2}+\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial y_2}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial y_2^2}+\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial z_2}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial z_2\,\partial y_2}\right)\\ &\qquad+\delta z\left(\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial x_2}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial x_2\,\partial z_2}+\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial y_2}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial y_2\,\partial z_2}+\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial z_2}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial z_2^2}\right)\Bigg]dv_2.\end{aligned}$$

Sir W. Thomson a admis que, grâce à l'infinie petitesse du corps, on avait dans tout l'espace

$$\mathcal{W}_2 = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial y_2} = 0, \qquad \frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial z_2} = 0.$$

L'égalité précédente devenait alors simplement

$$\delta\mathfrak{F} = -\frac{F(\mathfrak{M}_2)}{2h}\left(\frac{\partial R^2}{\partial x_2}\delta x+\frac{\partial R^2}{\partial y_2}\delta y+\frac{\partial R^2}{\partial z_2}\delta z\,dv_2.\right)$$

Pour que la transformation soit possible, il faut que l'on ait

$$\delta\mathcal{F} < 0$$

ou

$$F(\mathfrak{M}_2)\left(\frac{\partial R^2}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial R^2}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial R^2}{\partial z}\,\delta z\right) > 0.$$

Pour les corps magnétiques, $F(\mathfrak{M}_2)$ est positif et l'inégalité précédente devient

$$\frac{\partial R^2}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial R^2}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial R^2}{\partial z}\,\delta z > 0.$$

Pour les corps diamagnétiques, $F(\mathfrak{M}_2)$ est négatif, et l'inégalité précédente devient

$$\frac{\partial R^2}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial R^2}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial R^2}{\partial z}\,\delta z < 0.$$

Ces deux inégalités sont bien l'expression algébrique de la loi de Faraday qui se trouverait ainsi démontrée.

Mais il est aisé de voir que l'on ne peut poser en un point du corps aimanté très petit

$$\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z} = 0.$$

Ces inégalités ne sont exactes que pour les points extérieurs au corps et situés à distance finie de ce corps.

Considérons en effet un point de la surface de notre petit corps. En ce point, nous avons

$$\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_e} = 4\pi[\mathcal{A}_2\cos(N_i, x) + \mathcal{B}_2\cos(N_i, y) + \mathcal{C}_2\cos(N_i, z)]$$

ou bien

$$[1 + 4\pi h\,F(\mathfrak{M}_2)]\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_e} + 4\pi h\,F(\mathfrak{M}_2)\frac{\partial v_2}{\partial N_i} = 0,$$

condition qui ne peut être réalisée que si $\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2}$, $\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_2}$ sont en général au voisinage du corps des quantités de l'ordre de $F(\mathfrak{M}_2)\frac{\partial v_2}{\partial N_i}$, et par conséquent que si le terme supprimé par Sir W. Thomson est du même ordre de grandeur que celui qu'il a conservé.

On voit, par conséquent, que la démonstration de la loi énoncée par Fa-

raday est insuffisante, et ce que nous avons dit nous oblige à rejeter cette loi.

6. Les calculs que nous venons de faire peuvent nous servir presque immédiatement à la discussion d'une méthode proposée par Jamin pour l'étude de la distribution du magnétisme sur un aimant permanent.

On sait que la partie expérimentale de cette étude revient à déterminer la valeur de $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e}$ aux divers points de la surface de cet aimant permanent. Voici comment Jamin s'y prenait pour déterminer cette quantité.

Une petite masse de fer doux était placée au point de la surface de l'aimant où l'on voulait déterminer $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e}$. On déterminait la force qu'il fallait lui appliquer pour l'arracher dans la direction de la normale à la surface.

Jamin pensait que la force ainsi déterminée était proportionnelle à $\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e}\right)^2$.

Pour justifier cette manière de voir, il admettait trois hypothèses :

1° Le contact du morceau de fer doux ne modifie pas sensiblement la distribution sur l'aimant étudié.

2° Dans les conditions où l'on opère, on peut négliger pour le fer doux la variation de $F(\mathfrak{M}_2)$ avec $\mathfrak{M}_2$.

3° L'aimantation de la particule de fer doux est donnée par les équations

$$\mathcal{A}_2 = -hF\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2},$$

$$\mathcal{B}_2 = -hF\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2},$$

$$\mathcal{C}_2 = -hF\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_2}.$$

Admettons sans discussion les deux premières hypothèses.

La troisième est en tous cas inacceptable. On a en effet

$$\mathcal{A}_2 = -hF\frac{\partial}{\partial x_2}(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2),$$

$$\mathcal{B}_2 = -hF\frac{\partial}{\partial y_2}(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2),$$

$$\mathcal{C}_2 = -hF\frac{\partial}{\partial z_2}(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2),$$

et nous venons de voir que l'on ne pouvait poser

$$\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_2} = 0.$$

Acceptons toutefois pour un instant cette hypothèse.

Soit T la force normale nécessaire pour arracher la particule magnétique suivant la normale; sous l'action de la force T, cette particule peut subir un déplacement infiniment petit $\delta N_e$ suivant la normale extérieure à l'aimant étudié. On a donc, lorsque $\delta N_e$ est positif,

$$T\,\delta N_e - \delta \mathcal{F} > 0.$$

Mais, d'après les hypothèses faites, on peut écrire

$$\delta \mathcal{F} = -\frac{F}{2h}\left(\frac{\partial \mathfrak{M}^2}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial \mathfrak{M}^2}{\partial y_2}\delta y_2 + \frac{\partial \mathfrak{M}^2}{\partial z_2}\delta z_2\right) dv_2.$$

On a d'ailleurs

$$\delta x_2 = \delta N_e \cos(N_e, x),$$
$$\delta y_2 = \delta N_e \cos(N_e, y),$$
$$\delta z_2 = \delta N_e \cos(N_e, z)$$

et, par conséquent,

$$\delta \mathcal{F} = -\frac{F}{2h}\frac{\partial \mathfrak{M}^2}{\partial N_e} dv_2\, \delta N_e,$$

et l'inégalité précédente devient

$$T + \frac{F}{2h}\frac{\partial \mathfrak{M}^2}{\partial N_e} dv_2 > 0.$$

La plus petite force qui puisse produire l'arrachement aurait alors pour valeur

$$T = -\frac{F}{2h}\frac{\partial \mathfrak{M}^2}{\partial N_e} dv_2.$$

Elle mesurerait donc non pas $\left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial N_e}\right)^2$, comme le pensait Jamin, mais $\frac{\partial \mathfrak{M}^2}{\partial N_e}$ ou, si l'on préfère,

$$\frac{\partial}{\partial N_e}\left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right)^2\right].$$

Ainsi l'une au moins des hypothèses admises par Jamin pour justifier l'emploi de la méthode d'arrachement dans l'étude de la distribution magnétique est inacceptable. D'ailleurs, même en admettant cette hypothèse,

on voit que la méthode ne peut servir à déterminer la quantité que Jamin pensait mesurer.

## § IV. — Comparaison des corps magnétiques et des corps diamagnétiques.

7. La forme la plus précise adoptée pour distinguer les corps magnétiques des corps diamagnétiques était fournie par la loi de Faraday : en un champ magnétique, un corps magnétique très petit tend à se déplacer dans le sens où la valeur absolue de la force croît, et un corps diamagnétique dans le sens où cette force décroît. La discussion précédente, en nous forçant de rejeter cette loi, nous oblige à chercher ailleurs un critérium qui distingue les corps magnétiques des corps diamagnétiques.

La question que nous nous proposons de résoudre maintenant peut s'énoncer brièvement ainsi : une masse dénuée de force coercitive est-elle attirée ou repoussée par des aimants permanents?

Commençons par préciser le sens de cette question.

Supposons une masse magnétique mise en présence d'aimants et soumise à l'action d'une pression normale et uniforme, seule force extérieure qui agisse sur elle.

Plaçons-la d'abord à une distance très grande et comme infinie des aimants permanents. Le potentiel thermodynamique interne du système a alors une valeur $\mathfrak{F}_0$.

Supposons ensuite qu'on l'amène à une distance finie des aimants permanents et que, la maintenant dans cette position, on laisse prendre à l'aimantation sa distribution d'équilibre. Le potentiel thermodynamique interne du système aura alors une certaine valeur $\mathfrak{F}$.

Si $\mathfrak{F}_0 - \mathfrak{F}$ est positif, le passage de la masse de la position infiniment éloignée à la position située à distance finie sera, au point de vue de la Thermodynamique, un phénomène possible. Le phénomène inverse sera impossible. Nous dirons alors qu'une masse magnétique très éloignée d'aimants permanents est *attirée* par ces aimants.

Si $\mathfrak{F}_0 - \mathfrak{F}$ est au contraire négatif, nous dirons que la masse très éloignée d'aimants permanents est *repoussée* par ces aimants. C'est dans ce sens seulement que, dans ce qui va suivre, doivent être pris les mots *attraction* et *répulsion*.

Or le signe de $\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_0$ est facile à trouver. On voit aisément en effet que

cette quantité peut s'écrire

$$\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_0 = h \int \left( \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \mathcal{V}^2}{\partial z_2} \right) dv_2$$
$$+ \frac{h}{2} \int \left( \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial z_2} \right) dv_2 + \int \mathfrak{F}(\mathfrak{M}_2)\, dv_2.$$

Mais on a

$$\mathcal{A}_2 = - h\, F(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial x_2},$$
$$\mathcal{B}_2 = - h\, F(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial y_2},$$
$$\mathcal{C}_2 = - h\, F(\mathfrak{M}_2) \frac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial z_2},$$

en sorte que l'on a

$$\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_0 = \int \left[ \mathfrak{F}(\mathfrak{M}_2) - \frac{\mathfrak{M}_2^2}{F(\mathfrak{M}_2)} \right] dv_2 - \frac{h}{2} \int \left( \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial z_2} \right) dv_2.$$

Mais un calcul analogue à celui que nous avons fait au commencement du Chapitre III nous donne

$$\int \left( \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial z_2} \right) dv_2$$
$$= \frac{1}{4\pi} \int \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial z} \right)^2 \right] dv,$$

la seconde intégrale triple s'étendant à tout l'espace.

D'autre part, l'égalité

$$F(\mathfrak{M}) = \frac{\mathfrak{M}}{\dfrac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{M})}{\partial \mathfrak{M}}}$$

donne

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}_2) = \int_0^{\mathfrak{M}_2} \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M})}\, d\mathfrak{M},$$

ou, en désignant par $\mu$ une valeur de $\mathfrak{M}$ comprise entre 0 et $\mathfrak{M}_2$,

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}_2) = \frac{\mathfrak{M}_2^2}{2\,F(\mu)}.$$

On a donc finalement

$$\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_0 = \int \left[ \frac{1}{2\,F(\mu)} - \frac{1}{F(\mathfrak{M}_2)} \right] \mathfrak{M}_2^2\, dv_2 - \frac{h}{8\pi} \int \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial z} \right)^2 \right] dv.$$

Le second terme est assurément négatif: quant au premier, si la valeur absolue du coefficient d'aimantation diminue, demeure constante ou croît assez faiblement pour ne jamais varier du simple au double lorsque l'aimantation croît, il sera certainement de signe contraire à $F(\mathfrak{M}_2)$; par conséquent, pour les corps magnétiques $\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_0$ est sûrement négatif; son signe est inconnu pour les corps diamagnétiques et ne peut être fixé que si l'on possède certains renseignements complémentaires. On peut donc énoncer la proposition suivante :

*Toute substance magnétique dénuée de force coercitive et placée à grande distance d'aimants permanents est attirée par ces aimants; on ne peut prévoir le signe du mouvement d'une masse diamagnétique.*

**8.** La proposition que nous venons d'obtenir ne suffit point à différencier les corps magnétiques d'avec les corps diamagnétiques; dans les actions exercées par les aimants permanents, peut-on marquer une opposition entre le rôle joué par ces deux sortes de corps? Cette opposition résultera de deux propositions extrêmement simples, que nous allons démontrer.

L'expérience classique qui sert à distinguer les corps diamagnétiques des corps magnétiques consiste dans l'observation de la position d'équilibre qu'ils prennent lorsqu'on les suspend par un fil entre les deux pôles d'un puissant électro-aimant. En réalité, le poids du corps est, pour tous les corps diamagnétiques et pour la plupart des corps magnétiques, si grand par rapport aux actions que le corps subit de la part de l'électro-aimant, que le fil n'est pas sensiblement dévié de la verticale, en sorte que l'on peut regarder le phénomène comme étant le même que si le corps était assujetti à se mouvoir autour d'un axe vertical.

Considérons donc un corps magnétique ou diamagnétique mobile autour d'un axe vertical OZ dans un champ magnétique. Lorsqu'on fait exécuter au corps un tour complet autour de l'axe OZ, le potentiel thermodynamique interne du système, qui en général a varié pendant le mouvement, reprend sa valeur primitive. Il a donc passé par un certain nombre de maxima et un certain nombre de minima; en d'autres termes, le corps a passé par un certain nombre de positions d'équilibre alternativement stables et instables.

Prenons l'une de ces positions d'équilibre. Soient, toujours suivant notre notation, $\mathfrak{V}_2$ la fonction potentielle des aimants permanents en un point du corps étudié et $\mathfrak{W}_2$ la fonction potentielle au même point du magnétisme distribué sur ce corps.

En chaque point du corps, on a

$$(15)\qquad \begin{cases} \mathcal{A} = -\,F(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \ldots)\,\dfrac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial x}, \\[2ex] \mathcal{B} = -\,F(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \ldots)\,\dfrac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial y}, \\[2ex] \mathcal{C} = -\,F(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \ldots)\,\dfrac{\partial(\mathcal{V}_2 + \mathcal{W}_2)}{\partial z}. \end{cases}$$

On a de plus

$$(16)\qquad \int\Bigg[\left(\mathcal{A}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial x\,\partial y} + \mathcal{B}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial y^2} + \mathcal{C}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial y}\right)x - \left(\mathcal{A}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial x^2} + \mathcal{B}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial y\,\partial x} + \mathcal{C}\frac{\partial^2\mathcal{V}_2}{\partial z\,\partial x}\right)y\Bigg]dv = 0,$$

l'intégration s'étendant au corps considéré.

Supposons que le corps soit très faiblement magnétique ou très faiblement diamagnétique; $F(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ est alors une quantité très petite; d'après les égalités (15), $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont en général des quantités très petites du même ordre; la quantité $\mathcal{W}_2$, définie par l'égalité

$$\mathcal{W}_2 = \int\left(\mathcal{A}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dv,$$

dans laquelle l'intégration s'étend à tout le corps magnétique, est encore une quantité très petite du même ordre, et il en est de même de ses dérivées partielles. On peut donc, en négligeant les quantités très petites du second ordre, écrire

$$\mathcal{A} = -\,F(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \ldots)\,\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x},$$
$$\mathcal{B} = -\,F(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \ldots)\,\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y},$$
$$\mathcal{C} = -\,F(\mathcal{M}, \alpha, \beta, \ldots)\,\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z},$$

ou encore

$$(17)\qquad \begin{cases} \mathcal{A} = \lambda\left[\left(\dfrac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z}\right)^2\right]\dfrac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x}, \\[2ex] \mathcal{B} = \lambda\left[\left(\dfrac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z}\right)^2\right]\dfrac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y}, \\[2ex] \mathcal{C} = \lambda\left[\left(\dfrac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z}\right)^2\right]\dfrac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z}, \end{cases}$$

la fonction $\lambda$ étant définie par l'égalité (6) du Chapitre II.

Moyennant ces égalités, la condition d'équilibre (16) devient

$$\int \lambda \left[ \left(\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial z}\right)^2 \right]$$
$$\left[ \left( \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial y} \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_2}{\partial y^2} + \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial z} \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_2}{\partial z \partial y} \right) x \right.$$
$$\left. - \left( \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial y} \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial z} \frac{\partial^2 \mathfrak{V}_2}{\partial z \partial x} \right) y \right] dv = 0.$$

Cette équation suffit à déterminer les positions d'équilibre du corps. Or il est aisé de voir que, si elle est vérifiée pour un corps, correspondant à une fonction $\lambda$ que nous désignerons par $\lambda_1$, c'est-à-dire à une certaine fonction $F(\mathfrak{M})$ que nous désignerons par $F_1$, elle l'est encore pour un corps de même forme et de même position, correspondant à une fonction $\lambda$ identique à $-\lambda_1$, c'est-à-dire à une fonction $F(\mathfrak{M})$ identique à $-F_1$, ce qu'on peut énoncer de la manière suivante :

*Dans les conditions que nous avons indiquées, deux corps, l'un très peu magnétique, l'autre très peu diamagnétique, ayant même forme et des fonctions magnétisantes égales en valeur absolue, ont les mêmes positions d'équilibre.*

Considérons maintenant l'expression de $\delta^2\mathfrak{F}$ donnée par l'égalité (7) et remplaçons-y $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ par leurs valeurs tirées des égalités (17). Nous verrons aisément que $\delta^2\mathfrak{F}$ change de signe en même temps que

$$\lambda \left[ \left(\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial z}\right)^2 \right],$$

en sorte que le théorème précédent peut être complété de la manière suivante :

*Les positions d'équilibre stable de l'un des deux corps sont les positions d'équilibre instable de l'autre.*

Si, par exemple, une aiguille allongée d'un corps paramagnétique, suspendue entre les deux pôles d'un électro-aimant, s'oriente dans la direction de ces deux pôles, une aiguille diamagnétique se mettra en croix avec cette direction.

Les théorèmes précédents, que l'on peut démontrer quelles que soient les liaisons qui assujettissent le corps magnétique, marquent l'opposition qui existe entre les corps magnétiques et les corps diamagnétiques.

# CHAPITRE V.

## MÉTHODES DE DÉTERMINATION DE LA FONCTION MAGNÉTISANTE.

### § I. — Méthode fondée sur l'emploi des équations de Poisson.

1. L'intégration des équations différentielles d'un problème quelconque d'aimantation par influence implique évidemment la connaissance de la valeur de la fonction

$$\lambda\left\{\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right], \alpha, \beta, \ldots\right\},$$

pour toute valeur du paramètre

$$\zeta=\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right],$$

ou, ce qui revient au même, de la valeur de la fonction

$$F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots).$$

Ces deux déterminations sont corrélatives. Nous avons vu, en effet, au Chapitre II, comment, de la connaissance de la fonction F, on déduisait la fonction λ. Si inversement on se donne la fonction λ, les équations de l'induction magnétique permettront d'écrire

$$\mathfrak{M}^2=\lambda^2\left\{\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right], \alpha, \beta, \ldots\right\}\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right].$$

Cette équation, résolue par rapport à

$$\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2,$$

donnera

$$\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2=\psi(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots),$$

et l'on aura

$$\lambda[\psi(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots), \alpha, \beta, \ldots]=-h\,F(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots).$$

De la fonction λ on aura ainsi déduit la fonction F.

2. Il existe deux types de méthodes pour déterminer la fonction $\lambda$ : l'un et l'autre ont été sommairement indiqués par G. Kirchhoff; le présent Chapitre aura donc seulement pour but de développer les vues de l'illustre physicien.

La première méthode consiste à déduire la connaissance de la fonction $\lambda$ des expériences faites en supposant, conformément à la théorie de Poisson, que $\lambda$ est une constante, en vue de déterminer la valeur de cette constante.

Dans cette théorie de Poisson, si l'on désigne par $\mu$ la constante par laquelle on remplace la fonction $\lambda$, les équations de l'équilibre magnétique deviennent

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mu\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x},\\ \mathcal{B} &= \mu\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y},\\ \mathcal{C} &= \mu\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

La fonction $\mathcal{V}$ est déterminée par les conditions suivantes :

1° A l'intérieur des aimants permanents, on a la même équation différentielle que dans la théorie développée dans le présent Mémoire; cette équation est l'équation (9 *bis*) du Chapitre II,

$$(2)\qquad \Delta\mathcal{V} = -4\pi\rho(x, y, z).$$

2° En tout autre point de l'espace, sauf aux surfaces de séparation des divers corps, on a, en supposant homogènes les divers corps dénués de force coercitive,

$$(3)\qquad \Delta\mathcal{V} = 0.$$

3° A la surface de séparation d'un aimant permanent et d'un milieu non magnétique, on a, comme dans la théorie actuelle [Chapitre II, égalité (11)],

$$(4)\qquad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e} = -4\pi s(x, y, z).$$

4° A la surface de séparation d'une substance dénuée de force coercitive et d'un milieu non magnétique, on a

$$(5)\qquad (1+4\pi\mu)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e} = 0.$$

5° A l'infini, on a

$$\mathcal{V} = 0. \tag{6}$$

Ces conditions déterminent la fonction $\mathcal{V}$ lorsqu'on connaît la forme du corps soumis à l'aimantation et la valeur du coefficient $\mu$. Si l'on intègre ces équations pour un corps dont la forme et la position sont données, mais dont le coefficient $\mu$ est laissé indéterminé, on trouvera pour $\mathcal{V}$ une expression de la forme

$$\mathcal{V} = f(x, y, z, \mu).$$

Il suffira alors, lorsqu'on voudra déterminer la valeur du coefficient $\mu$ pour une substance, de former avec cette substance un corps de la forme que l'on considère, et de déterminer expérimentalement la valeur en un point d'une quantité dont l'expression puisse se déduire de celle de $\mathcal{V}$.

Si l'on applique cette méthode à une substance pour laquelle on ne puisse pas regarder $\mu$ comme constant, pour laquelle le coefficient $\mu$ doive être remplacé par la fonction $\lambda\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right]$, quelle sera la signification des nombres, variables avec l'intensité du champ magnétique, que l'on obtiendra ainsi, au lieu du nombre constant qui devrait représenter $\mu$?

Si le corps mis en expérience est un ellipsoïde et si le champ magnétique constitué par les aimants permanents est un champ uniforme, le corps s'aimante uniformément, en sorte que la quantité $\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2$ a, en tout point de ce corps, la même valeur. G. Kirchhoff a montré qu'alors les nombres variables obtenus par la méthode que nous venons d'indiquer représentaient précisément la quantité

$$\lambda\left[\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right],$$

et il a fait usage de cette remarque pour déduire d'expériences de Weber quelques déterminations de la fonction $\lambda$ propre au fer doux.

Cette proposition de G. Kirchhoff peut se généraliser de la manière suivante :

THÉORÈME I. — *Si un corps homogène, possédant une fonction magnétisante déterminée, s'aimante uniformément dans des conditions déterminées, la fonction magnétisante a alors une même valeur* M *en tous les points du corps; un corps de même forme, ayant un coefficient d'aiman-*

*tation $\mu$ constant et égal à M, prendra la même aimantation uniforme que le précédent.*

Il nous suffit pour cela de démontrer que la fonction $\mathfrak{V}$, qui intègre les équations différentielles du premier problème, intègre aussi les équations différentielles du second; car, cette proposition une fois démontrée, l'aimantation en un point sera, dans le premier problème, déterminée par les équations

$$\mathcal{A} = \lambda\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x},$$

$$\mathcal{B} = \lambda\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y},$$

$$\mathcal{C} = \lambda\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z},$$

et, dans le second problème, par les équations

$$\mathcal{A} = \mu\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x},$$

$$\mathcal{B} = \mu\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y},$$

$$\mathcal{C} = \mu\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z},$$

qui conduisent aux mêmes valeurs de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, puisque $\mu$ et

$$\lambda\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}\right)^2\right]$$

ont la même valeur M.

Or il est aisé de voir que les deux problèmes conduisent à la même fonction $\mathfrak{V}(x, y, z)$.

En effet, les équations (2), (4) et (6) sont communes aux deux problèmes; dans chacun des deux problèmes, la fonction $\mathfrak{V}$ vérifie l'équation

$$\Delta\mathfrak{V} = 0$$

en tout point du milieu non magnétique.

Dans le premier problème, en tout point du corps dénué de force coercitive, la fonction $\mathfrak{V}$ vérifie l'équation différentielle (9 *ter*) du Chapitre II,



équation qui peut s'écrire, pour un corps homogène,

$$\left\{1+4\pi\lambda\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}\Delta\varphi$$

$$+\frac{\partial\lambda\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]}{\partial\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right.$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$\left.+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}=0.$$

Mais, si l'aimantation est uniforme, on a

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=\text{const.},$$

en sorte que l'équation précédente devient

$$\Delta\varphi=0.$$

C'est aussi l'équation que, dans le second problème, la fonction $\varphi$ doit vérifier à l'intérieur du corps soumis à l'aimantation.

Enfin, dans le premier problème, à la surface de séparation du corps soumis à l'aimantation et du milieu non magnétique, la fonction $\varphi$ vérifie l'équation (11 *ter*) du Chapitre II,

$$\left\{1+4\pi\lambda\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial N_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial N_e}=0,$$

qui devient ici

$$(1+4\pi M)\frac{\partial\varphi}{\partial N_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial N_e}=0,$$

et coïncide avec l'équation (5) du second problème où l'on donne à $\mu$ la valeur M.

Par une voie analogue, on démontre la réciproque suivante :

Théorème II. — *Considérons un cas particulier où un corps homogène soumis à l'aimantation et possédant un coefficient d'aimantation $\mu$ indépendant de la grandeur de l'aimantation s'aimante uniformément pour toutes les valeurs de ce coefficient; remplaçons ce corps par un*

*corps homogène de même forme correspondant à une certaine fonction magnétisante λ. Ce corps prendra identiquement la même aimantation qu'un corps de la première série pour lequel le coefficient μ aurait une valeur M déterminée de la manière suivante :*

*En un point intérieur à l'un quelconque des corps de la première série, nous avons*

$$\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)^2=\psi(\mu),$$

*et M satisfait à l'équation*

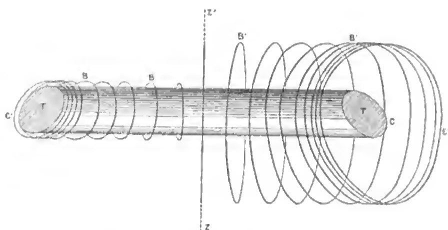
$$\psi(M)-M=0.$$

Ce théorème entraîne l'exactitude de la méthode proposée par G. Kirchhoff pour la détermination de la fonction λ. Il se peut que le cas de l'ellipsoïde placé dans un champ uniforme soit le seul cas où un corps de forme donnée, placé dans un champ donné, s'aimante uniformément, quelle que soit la valeur de son coefficient d'aimantation. Dans ce cas, le théorème précédent se réduirait à celui de G. Kirchhoff.

## § II. — Méthode du tore.

3. Soit C une courbe (*fig.* 1) qui, par sa révolution autour de l'axe ZZ', 

Fig. 1.




engendre un tore T, que nous supposerons formé par une certaine substance magnétique.

Une courbe C′, infiniment voisine de la courbe C, mais extérieure à cette courbe C, par sa révolution autour du même axe ZZ′, engendre un second tore B renfermant le premier dans son intérieur. Sur ce tore sont placés *n* fils conducteurs, fermés sur eux-mêmes, équidistants les uns des autres (disposition qui, dans la pratique, sera remplacée par un enroulement continu, à tours assez rapprochés).

Une troisième courbe C″, renfermant à son intérieur les courbes C et C′, et non infiniment voisine de ces dernières, forme, par sa révolution autour de l'axe ZZ′, un troisième tore B′ enfermant les deux premiers à son intérieur. Sur ce tore B′ sont placés *n′* fils conducteurs, fermés sur eux-mêmes, équidistants les uns des autres (disposition remplacée, dans la pratique, par un second enroulement continu).

Dans le tore B′ faisons passer un courant d'intensité $i$; ce courant va aimanter le tore T. Il est facile de préciser les lois de cette aimantation.

D'après les lois connues de l'Électromagnétisme, lois que nous admettons ici sans discussion, l'action de la bobine B′ crée dans l'espace un champ magnétique dont nous désignons par $\mathfrak{V}$ la fonction potentielle. En un point $(x, y, z)$ extérieur à la bobine B′, on a

$$(7)\qquad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} = 0.$$

A l'intérieur de la bobine B′, la fonction potentielle n'est plus constante. Prenons pour coordonnées d'un point intérieur à la bobine les coordonnées polaires $\rho$ et $\theta$ de sa projection sur un plan perpendiculaire à l'axe du tore, le pôle étant au point où l'axe du tore rencontre ce plan, et la hauteur $z$ de ce point au-dessus de ce plan. Nous aurons alors, en tout point intérieur à la bobine,

$$(7\ bis)\qquad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \rho} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \theta} = 2\mathrm{K}n'i.$$

K étant une constante qui dépend du système d'unités choisi.

Admettons que ce champ aimante le tore magnétique suivant les mêmes lois qu'un champ créé par un aimant.

Les propositions suivantes sont évidentes, grâce à la symétrie de la figure autour de l'axe ZZ′ :

L'aimantation est, en chaque point du tore T, dirigée normalement au plan passant par ce point et par l'axe ZZ′ du tore.

En tous les points intérieurs au tore qui correspondent aux mêmes valeurs de $\rho$ et de $z$, l'aimantation a la même valeur.

Cela étant, si l'on désigne par $\mathcal{V}$ la fonction potentielle totale en un point du tore, on aura, d'après les lois de l'induction magnétique,

$$(8) \qquad \mathfrak{M} = \frac{1}{\rho}\lambda\left[\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \vartheta}\right)^2\right]\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \vartheta}.$$

Soit $\mathfrak{W}$ la fonction potentielle au point considéré de l'aimantation distribuée sur le tore. Nous aurons

$$\mathfrak{W} = \mathbf{S}\int_0^{2\pi} \mathfrak{M}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \vartheta}\,\omega\, d\vartheta,$$

$\omega$ étant l'aire d'un élément de la courbe C et le signe $\mathbf{S}$ indiquant une sommation qui s'étend à tous ces éléments.

Cette expression peut s'écrire

$$\mathfrak{W} = \mathbf{S}\,\mathfrak{M}\,\omega\int_0^{2\pi} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \vartheta}\, d\vartheta,$$

et il est alors évident que

$$\mathfrak{W} = 0,$$

en tout point intérieur à l'aimant.

Dès lors l'égalité évidente

$$\mathcal{V} = \mathfrak{V} + \mathfrak{W}$$

devient, à l'intérieur de l'aimant,

$$\mathcal{V} = \mathfrak{V},$$

et, en vertu des égalités (7 *bis*), l'égalité (8) devient

$$(9) \qquad \mathfrak{M} = \frac{2Kn'i}{\rho}\lambda\left[\left(\frac{2Kn'i}{\rho}\right)^2\right].$$

D'après les principes de l'Électromagnétisme, le potentiel du tore ainsi aimanté sur un des anneaux de la bobine B, cet anneau étant supposé par-



couru par un courant d'intensité égale à l'unité, a pour valeur

$$\mathfrak{W} = 4\pi K \mathbf{S} \mathfrak{M} \omega,$$

$\omega$ étant un élément de l'aire enveloppée par la courbe C' (ou, ce qui revient au même, par la courbe C) et $\mathfrak{M}$ l'aimantation du tore en un point de cet élément. D'après l'égalité (9), cette dernière égalité devient

$$(10) \qquad \mathfrak{W} = 8\pi K^2 n' i \mathbf{S} \lambda \left[\left(\frac{2 K n' i}{\rho}\right)^2\right] \frac{\omega}{\rho}.$$

Sur un des anneaux de la bobine B, parcouru par un courant supposé égal à l'unité, la bobine B' admet un potentiel qui a pour valeur

$$(11) \qquad \mathfrak{V} = 2 K^2 n' i \mathbf{S} \frac{\omega}{\rho}.$$

Il en résulte que l'ensemble du tore aimanté et de la bobine B' ont sur la bobine B, parcourue par un courant égal à l'unité, un potentiel

$$(12) \qquad \mathfrak{v} = n(\mathfrak{V} + \mathfrak{W}) = 2 K^2 n n' i \mathbf{S} \left\{ 1 + 4\pi\lambda \left[\left(\frac{2 K n' i}{\rho}\right)^2\right] \right\} \frac{\omega}{\rho}.$$

Supposons que l'on ouvre la bobine B' de façon à supprimer le courant $i$. Le tore se désaimante; la désaimantation du tore et l'interruption du courant $i$ produisent dans la bobine B un courant d'induction. Soit Q la quantité d'électricité que ce courant met en mouvement, quantité que l'on peut mesurer par l'impulsion donnée à une aiguille de galvanomètre; soit R la résistance de la bobine B. Les lois de l'induction montrent que l'on a

$$Q = \frac{\mathfrak{v}}{R}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (12),

$$(13) \qquad Q = \frac{2 K^2 n n' i}{R} \mathbf{S} \left\{ 1 + 4\pi\lambda \left[\left(\frac{2 K n' i}{\rho}\right)^2\right] \right\} \frac{\omega}{\rho}.$$

Désignons par $\rho_0$ une des valeurs que prend $\rho$ à l'intérieur du tore. Posons

$$\rho = \rho_0 + r$$

et supposons que $r$ soit toujours petit. Posons en outre, pour abréger,

$$\zeta = \left(\frac{2\mathrm{K}n'i}{\rho}\right)^2;$$

Q pourra se développer ainsi :

$$(14) \qquad \mathrm{Q} = \frac{2\mathrm{K}^2 nn'i}{\mathrm{R}}\left(\mathrm{P}_0 \mathbf{S}\,\omega + \mathrm{P}_1 \mathbf{S}\, r\omega + \ldots + \mathrm{P}_m \mathbf{S}\, r^m\omega + \ldots\right),$$

$\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_m$ ayant les valeurs suivantes :

$$(15) \left\{\begin{array}{l}
\mathrm{P}_0 = \quad \dfrac{1}{\rho_0}[1 + 4\pi\lambda(\zeta)],\\[2ex]
\mathrm{P}_1 = -\left\{\dfrac{1}{\rho_0^2}[1 + 4\pi\lambda(\zeta)] + 32\pi\mathrm{K}^2 n'^2 i^2 \dfrac{2}{\rho_0^3}\dfrac{\partial\lambda(\zeta)}{\partial\zeta}\right\},\\[2ex]
\mathrm{P}_2 = \quad \left\{\dfrac{1}{\rho_0^3}[1 + 4\pi\lambda(\zeta)] + \dfrac{32\pi\mathrm{K}^2 n'^2 i^2}{\rho_0^5}\left[2\dfrac{\partial\lambda(\zeta)}{\partial\zeta} + 3\dfrac{\partial^2\lambda(\zeta)}{\partial\zeta^2}\right]\right\},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathrm{P}_m = (-1)^m\left\{\dfrac{1}{\rho_0^{m+1}}[1 + 4\pi\lambda(\zeta)]\right.\\[2ex]
\qquad\qquad \left. + \dfrac{32\pi\mathrm{K}^2 n'^2 i^2}{\rho_0^{m+3}}\left[2\dfrac{\partial\lambda(\zeta)}{\partial\zeta} + 3\dfrac{\partial^2\lambda(\zeta)}{\partial\zeta^2} + \ldots + (m+1)\dfrac{\partial^m\lambda(\zeta)}{\partial\zeta^m}\right]\right\},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Si, en particulier, la distance des divers points du tore à l'axe varie assez peu pour que les intégrales

$$\mathbf{S}\, r\omega, \quad \mathbf{S}\, r^2\omega, \quad \ldots, \quad \mathbf{S}\, r^m\omega, \quad \ldots$$

soient négligeables devant l'intégrale

$$\Omega = \mathbf{S}\,\omega,$$

ce qui arrive si le tore est un anneau infiniment délié ou un tube cylindrique infiniment mince, la formule (15) devient simplement

$$\mathrm{Q} = \frac{2\mathrm{K}^2 nn'i\Omega}{\mathrm{R}\rho_0}\left\{1 + 4\pi\lambda\left[\left(\frac{2\mathrm{K}n'i}{\rho}\right)^2\right]\right\}.$$

Cette formule, qui serait vraie, quelles que soient la forme et les dimensions

du tore dans la théorie de Poisson, où la fonction $\lambda$ est remplacée par une constante, permet alors de déterminer expérimentalement la fonction $\lambda$. Cette méthode, nous l'avons dit, a été indiquée par G. Kirchhoff [1]; elle a été employée par plusieurs expérimentateurs, notamment par M. Rowland.

Si l'on voulait l'employer avec un tore de dimensions quelconques et en tenant compte des variations de $\lambda$, il faudrait supposer $\lambda(\zeta)$ développable en série uniformément convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $\zeta$,

$$\lambda(\zeta) = A_0 + A_1\zeta + A_2\zeta^2 + \ldots,$$

et supposer aussi ses dérivées de tous les ordres développables de la même manière. On en déduirait pour Q un développement de la forme suivante

$$Q = \frac{2K^2 nn' i}{R}(B_0 + B_1\zeta + B_2\zeta^2 + \ldots),$$

développement dans lequel on aurait

$$B_i = \alpha_0^i A_0 + \alpha_1^i A_1 + \alpha_2^i A_2 + \ldots,$$

la quantité $\alpha_j^i$ elle-même étant une série de la forme

$$\alpha_j^i = \beta_0 \mathsf{S}\, \varpi + \beta_1 \mathsf{S}\, r\varpi + \beta_2 \mathsf{S}\, r^2\varpi + \ldots,$$

les quantités $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ étant des coefficients connus. Il serait impossible d'employer un développement aussi compliqué à déterminer les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots$ dont dépend le développement de la quantité $\lambda(\zeta)$.

M. Paul Janet [2] a donné récemment une méthode de détermination de la fonction magnétisante, qui permet, au contraire, l'emploi d'un développement de ce genre.

---

(1) G. Kirchhoff, *Zur Theorie des in einem Eisenkörper inducirten Magnetismus* (*Poggendorff's Annalen*, Ergänzungsband V, 1870. *G. Kirchhoff's gesammelte Abhandlungen*, p. 223).

(2) Paul Janet, *Sur l'application du phénomène de l'aimantation transversale à l'étude du coefficient d'aimantation du fer* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CVI, p. 200; 16 janvier 1888).

# CHAPITRE VI.

## PHÉNOMÈNES THERMIQUES.

---

### § I. — Quantité de chaleur dégagée dans une transformation d'un système qui renferme des aimants.

1. On a souvent étudié, au point de vue expérimental, les phénomènes thermiques qui accompagnent l'aimantation ou la désaimantation d'un morceau de fer doux placé à l'intérieur d'une spirale parcourue par un courant, mais il n'entre pas dans nos intentions d'étudier ici ces phénomènes, car cette étude rentre dans l'étude plus générale de l'aimantation par les courants, que nous ne voulons point faire ici. Nous nous bornerons donc aux phénomènes thermiques que peuvent présenter des systèmes ne renfermant que des aimants.

Rappelons, à cet égard, une relation dont nous aurons à faire un usage constant au cours de ce Chapitre.

L'état d'un système est défini par la température T et par un certain nombre de paramètres $\alpha$, $\beta$, .... Ces paramètres sont choisis de telle sorte que, si T varie sans qu'aucun d'eux change de valeur, les forces extérieures n'effectuent aucun travail; c'est ce qui arrive, par exemple, lorsque l'état d'un système soumis à une pression normale et uniforme est défini par la température et le volume du système.

Le système considéré admet un potentiel thermodynamique interne $\mathcal{F}$, une énergie interne $\Upsilon$, une entropie $\Sigma$; les forces extérieures qui agissent sur lui admettent, à température constante, un potentiel W, en sorte que le système admet un potentiel thermodynamique total $\Omega$. On a, par définition,

$$(1)\qquad \begin{cases} \Omega = \mathcal{F} + W, \\ \mathcal{F} = E(\Upsilon - T\Sigma). \end{cases}$$

Élevons de $dT$ la température du système, en laissant constants les autres paramètres. On a ainsi une modification réversible dans laquelle aucun travail extérieur n'est effectué, modification dans laquelle par conséquent

$$d\Upsilon = T\,d\Sigma,$$

ce qui donne

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial T} - T\frac{\partial \Sigma}{\partial T} = 0.$$

Mais, d'autre part, les égalités (1) donnent

$$\frac{\partial \Omega}{\partial T} = E\left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial T} - T\frac{\partial \Sigma}{\partial T} - \Sigma\right) + \frac{\partial W}{\partial T}.$$

La comparaison de ces égalités donne

$$(2)\qquad \begin{cases} E\Sigma = -\dfrac{\partial}{\partial T}(\Omega - W) = -\dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T}, \\ E\Upsilon = \mathfrak{F} - T\dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T}. \end{cases}$$

De là, se déduit une conséquence simple. Dans une modification isothermique, le corps dégage une quantité de chaleur $dQ$, et l'on a

$$dQ = -d\Upsilon - \frac{1}{E}dW.$$

D'après les égalités (2), cette relation peut s'écrire

$$(3)\qquad E\,dQ = -d(\mathfrak{F} + W) + d\left(T\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T}\right).$$

Si le système était en équilibre, on aurait

$$d(\mathfrak{F} + W) = 0$$

et, par conséquent,

$$(4)\qquad dQ = A\,d\left(T\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T}\right),$$

A désignant, suivant l'usage, l'inverse de l'équivalent mécanique de la chaleur.

Ces deux relations (3) et (4) se mettent immédiatement sous forme finie; dans une modification isothermique, qui fait passer le système de l'état ($\alpha$) à l'état ($\beta$), le système dégage une quantité de chaleur Q donnée par la relation

$$(5)\qquad EQ = \mathfrak{F}_\alpha + W_\alpha - T\frac{\partial \mathfrak{F}_\alpha}{\partial T} - \mathfrak{F}_\beta - W_\beta + T\frac{\partial \mathfrak{F}_\beta}{\partial T},$$

et, si la modification est réversible, par la relation

(6) $$EQ = T \frac{\partial}{\partial T}(\mathfrak{F}_\beta - \mathfrak{F}_\alpha).$$

Nous allons appliquer ces relations aux modifications subies par des systèmes qui renferment des aimants.

2. Pour un semblable système, nous avons

(7) $$\mathfrak{F} = E(U - TS) + \mathfrak{T} + \int \mathfrak{f}(\mathfrak{M})\, dv,$$

conformément à l'égalité (19) du Chapitre I.

Parmi les paramètres autres que l'intensité d'aimantation dont dépend la fonction $\mathfrak{f}(\mathfrak{M})$, figure la température T, ce que nous mettrons en évidence en écrivant non plus $\mathfrak{f}(\mathfrak{M})$, mais $\mathfrak{f}(\mathfrak{M}, T)$.

L'état du système est défini par la température T et un certain nombre d'autres paramètres. Nous supposons ces derniers choisis de telle sorte que, lorsque T varie, ces paramètres demeurant constants, chacun des corps du système garde sa forme et sa position. Il en résulte que, dans ces conditions, la variation du seul paramètre T n'entraîne aucun travail des forces extérieures, comme le suppose l'établissement des équations précédentes. Il en résulte aussi que la variation du seul paramètre T ne fait pas varier $\mathfrak{T}$. On a alors

(8) $$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T} = E \frac{\partial}{\partial T}(U - TS) + \int \frac{\partial \mathfrak{f}(\mathfrak{M}, T)}{\partial T}\, dv.$$

D'après les égalités (7) et (8), l'égalité (5) devient, pour un système qui renferme des aimants,

(9) $$\begin{aligned} EQ = {} & E(U_\alpha - TS_\alpha) + W_\alpha + \mathfrak{T}_\alpha - ET\frac{\partial}{\partial T}(U_\alpha - TS_\alpha) + \int \left[\mathfrak{f}_\alpha(\mathfrak{M}, T) - T\frac{\partial \mathfrak{f}_\alpha(\mathfrak{M}, T)}{\partial T}\right] dv \\ & - \left\{E(U_\beta - TS_\beta) + W_\beta + \mathfrak{T}_\beta - ET\frac{\partial}{\partial T}(U_\beta - TS_\beta) + \int \left[\mathfrak{f}_\beta(\mathfrak{M}, T) - T\frac{\partial \mathfrak{f}_\beta(\mathfrak{M}, T)}{\partial T}\right] dv\right\}. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} EQ_1 = {} & E(U_\alpha - TS_\alpha) + W_\alpha - E(U_\beta - TS_\beta) - W_\beta \\ & - ET\frac{\partial}{\partial T}(U_\alpha - TS_\alpha) + ET\frac{\partial}{\partial T}(U_\beta - TS_\beta) \end{aligned}$$

et

$$\mathfrak{Q} = Q - Q_1.$$

L'égalité (9) pourra s'écrire

$$(10)\qquad \begin{aligned} E\mathfrak{Q} = \mathfrak{F}_\alpha - \mathfrak{F}_\beta &+ \int\left[\mathcal{F}_\alpha(\mathfrak{M}, T) - T\frac{\partial}{\partial T}\mathcal{F}_\alpha(\mathfrak{M}, T)\right]dv \\ &- \int\left[\mathcal{F}_\beta(\mathfrak{M}, T) - T\frac{\partial}{\partial T}\mathcal{F}_\beta(\mathfrak{M}, T)\right]dv; \end{aligned}$$

$Q_1$ représente la quantité de chaleur qui serait dégagée si l'on faisait subir au système exactement les mêmes changements d'état en le maintenant constamment à l'état non magnétique; la quantité $\mathfrak{Q}$ mesure donc la part d'influence exercée sur le phénomène thermique par l'aimantation du système et par ses variations.

La plupart des auteurs qui se sont occupés des phénomènes thermiques produits au sein de systèmes qui renferment des aimants ont remplacé l'égalité (10) par l'égalité incomplète

$$(11)\qquad E\mathfrak{Q} = \mathfrak{F}_\alpha - \mathfrak{F}_\beta$$

et ont été ainsi conduits à des conclusions erronées, comme nous l'allons voir dans les paragraphes suivants.

## § II. — Influence de l'aimantation sur la chaleur dégagée dans une réaction chimique.

3. Supposons qu'un fragment d'une substance aimantée entre en une combinaison chimique. Quelle relation existera entre la quantité de chaleur Q dégagée par cette réaction et la quantité de chaleur $Q_1$ dégagée par la même réaction préparée au moyen d'une substance non aimantée?

Ce problème comprend deux cas distincts : dans le premier, le corps aimanté est un corps doué de force coercitive et le système ne renferme point d'autre aimant; dans le second, le corps aimanté est dénué de force coercitive et le système renferme des aimants permanents qui produisent l'aimantation de la substance considérée.

Envisageons tout d'abord le premier cas. Supposons négligeable le magnétisme de la combinaison formée; dans ces conditions, le système, dans l'état final, ne renferme plus aucun aimant, et nous avons

$$\mathfrak{F}_\beta = 0,$$
$$\mathcal{F}_\beta(\mathfrak{M}_\beta, T) = 0,$$
$$\frac{\partial \mathcal{F}_\beta(\mathfrak{M}_\beta, T)}{\partial T} = 0,$$

ce qui donne

$$(12)\qquad Q = Q_1 + A\mathcal{F}_2 + A\int\left[\mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, T) - T\frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}_2, T)}{\partial T}\right]dv.$$

L'égalité (10) du Chapitre III nous donne

$$\mathcal{F}_2 = \frac{h}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z}\right)^2\right]dv,$$

l'intégration s'étendant au système tout entier.

D'autre part, nous avons

$$\mathcal{F}(\mathfrak{M}, T) = \int_0^{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{M}}{F(\mathfrak{M}, T)}\,d\mathfrak{M}.$$

L'égalité (12) peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} Q = Q_1 &+ \frac{Ah}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z}\right)^2\right]dv \\ &+ A\int\left\{\int_0^{\mathfrak{M}_2} \frac{\mathfrak{M}}{F_2(\mathfrak{M}, T)}\left[1 + \frac{T}{F_2(\mathfrak{M}, T)}\frac{\partial F_2(\mathfrak{M}, T)}{\partial T}\right]d\mathfrak{M}\right\}dv. \end{aligned}$$

*Si le corps entrant en combinaison est magnétique et si son coefficient d'aimantation croît ou demeure constant lorsque la température croît, la chaleur dégagée par la combinaison est plus grande lorsque le corps est aimanté que lorsqu'il ne l'est pas. En tout autre cas, le signe de la différence entre ces deux quantités de chaleur ne peut être prévu,* a priori, *sans données numériques.*

4. Envisageons maintenant le cas où le corps entrant en combinaison est un corps dénué de force coercitive et où la combinaison s'effectue sous l'influence d'aimants permanents. Réservons, suivant notre notation habituelle, l'indice (1) aux aimants permanents et l'indice (2) à la substance dénuée de force coercitive. Soit $\varpi_1$ la fonction potentielle en un point des aimants permanents du magnétisme répandu en ces aimants; soit $\varpi_2$ la fonction potentielle en un point de la masse magnétique du magnétisme répandu sur cette masse; soit enfin $\mathcal{V}_2$ la fonction potentielle en un point de la masse magnétique du magnétisme répandu sur les aimants perma-

nents. Nous aurons

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = {} & \frac{h}{2}\int\left(\mathcal{A}_1\frac{\partial\mathcal{W}_1}{\partial x_1}+\mathcal{B}_1\frac{\partial\mathcal{W}_1}{\partial y_1}+\mathcal{C}_1\frac{\partial\mathcal{W}_1}{\partial z_1}\right)dv_1\\ & + h\int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right)dv_2\\ & + \frac{h}{2}\int\left(\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial x_2}+\mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial y_2}+\mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial z_2}\right)dv_2.\end{aligned}$$

Dans l'état initial ($\alpha$) du système comme dans l'état final ($\beta$), le premier terme garde la même valeur; les deux derniers sont nuls dans l'état final. On a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\alpha - \mathcal{F}_\beta = {} & h\int\left(\mathcal{A}_\alpha\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_2}+\mathcal{B}_\alpha\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y_2}+\mathcal{C}_\alpha\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right)dv_2\\ & + \frac{h}{2}\int\left(\mathcal{A}_\alpha\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial x_2}+\mathcal{B}_\alpha\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial y_2}+\mathcal{C}_\alpha\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial z_2}\right)dv_2.\end{aligned}$$

Pour les aimants permanents, $\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})$ et $\frac{\partial}{\partial \mathrm{T}}\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \mathrm{T})$ ont la même valeur dans l'état initial et dans l'état final. Pour le corps magnétique, ces quantités sont nulles dans l'état final, puisque la combinaison est supposée non magnétique. On a donc

$$\begin{aligned}& \int\left[\mathcal{F}_\alpha(\mathfrak{M},\mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial\mathrm{T}}\mathcal{F}_\alpha(\mathfrak{M},\mathrm{T})\right]dv\\ & + \int\left[\mathcal{F}_\beta(\mathfrak{M},\mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial\mathrm{T}}\mathcal{F}_\beta(\mathfrak{M},\mathrm{T})\right]dv\\ & = \int\left[\mathcal{F}_\alpha(\mathfrak{M},\mathrm{T}) - \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial\mathrm{T}}\mathcal{F}_\alpha(\mathfrak{M},\mathrm{T})\right]dv_2,\end{aligned}$$

et l'égalité (12) devient, dans ce cas,

$$\begin{aligned}\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_1 + \mathrm{A}\Bigg[ & h\int\left(\mathcal{A}_\alpha\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial x_2}+\mathcal{B}_\alpha\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial y_2}+\mathcal{C}_\alpha\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right)dv_2\\ & + \frac{h}{2}\int\left(\mathcal{A}_\alpha\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial x_2}+\mathcal{B}_\alpha\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial y_2}+\mathcal{C}_\alpha\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial z_2}\right)dv_2 + \int\mathcal{F}_\alpha(\mathfrak{M},\mathrm{T})\,dv_2\Bigg]\\ & - \mathrm{AT}\int\frac{\partial\mathcal{F}_\alpha(\mathfrak{M},\mathrm{T})}{\partial\mathrm{T}}dv_2.\end{aligned}$$

Par un calcul analogue à celui que nous avons effectué au Chapitre IV,

§ III, n° 5, le coefficient de A peut s'écrire

$$\int\left[\frac{1}{2F(M,T)}-\frac{1}{F(\mathfrak{M},T)}\right]\mathfrak{M}^2 dv_2 - \frac{h}{8\pi}\int\left[\left(\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{W}_2}{\partial z}\right)^2\right]dv,$$

M étant compris entre o et $\mathfrak{M}$, et la dernière intégrale s'étendant à tout l'espace.

On voit alors aisément que ce coefficient est négatif pour tous les corps magnétiques connus, et de signe inconnu pour les corps diamagnétiques.

Quant au dernier terme du second membre de l'égalité précédente, il peut s'écrire

$$AT\int\left\{\int_0^{\mathfrak{M}_2}\frac{\mathfrak{M}}{[F(\mathfrak{M},T)]^2}\frac{\partial F(\mathfrak{M},T)}{\partial T}d\mathfrak{M}\right\}dv_2.$$

Pour toute substance magnétique ou diamagnétique, il est positif si le coefficient d'aimantation croît avec la température, négatif s'il décroît lorsque la température croît. Par conséquent, on peut énoncer la proposition suivante :

*Lorsqu'une substance magnétique entre en réaction pour fournir une combinaison chimique dont le magnétisme soit négligeable, elle dégage une moindre quantité de chaleur lorsque la combinaison s'effectue dans un champ magnétique que lorsque la combinaison s'effectue en dehors du champ, pourvu que le coefficient d'aimantation diminue ou demeure constant lorsque la température croît; si ce coefficient augmente avec la température, on ne peut plus rien prévoir en dehors des données numériques. Il en est de même pour tous les corps diamagnétiques.*

La proposition que nous venons d'énoncer montre combien il importait de distinguer l'un de l'autre les deux cas que nous avons examinés. Si les variations du coefficient d'aimantation avec la température sont négligeables et si le corps est magnétique, on est assuré que l'aimantation exerce, dans les deux cas, des effets inverses sur la chaleur de combinaison (¹).

L'analogie du calcul effectué au présent paragraphe avec celui que nous avons effectué au Chapitre IV, § III, n° 5, ne doit pas surprendre. On aurait, en effet, pu obtenir le résultat précédent en supposant que l'on éloigne à l'infini la masse dénuée de force coercitive, que l'on effectue la réaction chimique à l'infini et que l'on ramène ensuite de l'infini la combinaison non magnétique formée.

(¹) *Voir* la Note à la fin du Mémoire.

## § III. — Influence de l'aimantation sur la possibilité d'une réaction chimique. Théorie des phénomènes observés par M. Remsen.

5. C'est dans le second des deux cas que nous venons d'examiner que s'est placé M. P. Janet qui, le premier, à notre connaissance, a signalé l'influence de l'aimantation sur la chaleur de combinaison. Rappelons dans quelles circonstances.

Depuis fort longtemps, les physiciens ont cherché à mettre en évidence l'influence du magnétisme sur les réactions chimiques. Après bien des tentatives infructueuses ou incertaines (1), M. Ira Remsen (2), plus heureux que ses prédécesseurs, parvint aux résultats suivants :

Dans une nacelle de fer mince, on place une solution de sulfate de cuivre. Dans les conditions ordinaires, le cuivre se dépose sur cette nacelle d'une façon uniforme; mais, si l'on place cette nacelle sur les pôles d'un puissant électro-aimant, l'épaisseur du dépôt devient très irrégulière. Nulle aux points en contact avec les pôles de l'électro-aimant, elle croît au fur et à mesure que l'on s'éloigne de ces points, et les lignes d'égale épaisseur, qui sont le lieu des points où la réaction chimique s'est produite avec une égale vitesse, dessinent des formes analogues à celles des lignes équipotentielles. Selon M. H.-V. Jueptner, résumant les vues de M. Ira Remsen, « le phénomène est facile à expliquer. L'attraction que l'aimant exerce sur le fer du récipient met obstacle à la dissolution de ce même fer et par suite à la séparation du cuivre; il en résulte que la quantité de cuivre séparée est inversement proportionnelle à l'attraction magnétique. Ainsi il est évident que, dans l'expérience précédente, l'attraction magnétique au pôle même est supérieure à l'action des forces chimiques : le fer ne pouvant se dissoudre, il est impossible que le cuivre se sépare. A mesure qu'on s'éloigne du pôle, l'action magnétique diminue; la quantité de fer dissous augmente avec la quantité de cuivre déposé ».

M. P. Janet (3), partant de la relation incomplète (11), a énoncé cette

(1) Ces tentatives sont résumées dans G. Wiedemann, *Die Lehre von der Elektricität*, t. III, p. 967.

(2) Voir *Action chimique dans un champ magnétique* (*La Lumière électrique*, t. IV, p. 126; 1881) et H.-V. Jueptner, *L'influence du magnétisme sur les métaux au point de vue électrolytique* (*La Lumière électrique*, t. X, p. 469; 1883).

(3) P. Janet, *De l'influence du magnétisme sur les phénomènes chimiques* (*Journal de Physique*, 2e série, t. VI, p. 286; 1887).

proposition qui, nous l'avons vu, est soumise à certaines restrictions : *La chaleur de combinaison du fer est plus grande hors du champ magnétique que dans ce champ.* Si alors, conformément aux principes de la Thermochimie, on prend pour mesure de la facilité avec laquelle une réaction s'effectue la quantité de chaleur qu'elle dégage, on arrive à une explication des phénomènes observés par M. Remsen.

Au dernier Congrès de l'Association Britannique, tenu en 1887 à Manchester (1), M. Rowland « a décrit quelques expériences remarquables, soit personnelles, soit dues à d'autres physiciens, sur l'action chimique dans un champ magnétique. Ces expériences ont montré qu'un morceau de fer soumis à une aimantation intense étant dissous, dans l'acide nitrique par exemple, les parties les plus fortement aimantées sont à demi protégées et sont moins rapidement attaquées que les autres. Par exemple, les angles et les arêtes se trouvent dans ces conditions protectrices, tandis que les parties concaves et les parties planes sont dissoutes les premières ».

L'explication adoptée est identique à celle qu'a adoptée M. P. Janet. « ... Il est évident que la dissolution du fer, qui se détache au voisinage d'un pôle aimanté, produit moins de travail que si ce fer n'était point aimanté; par conséquent, la tendance protectrice de l'aimantation était à prévoir.... »

Nous nous sommes proposé de donner des phénomènes précédents une théorie qui ne reposât point sur l'égalité incomplète (11) et qui, surtout, ne fît point usage des principes erronés de la Thermochimie; on sait aujourd'hui que la possibilité d'une réaction ne dépend point du signe de la quantité de chaleur qu'elle met en jeu, mais du signe du travail non compensé qu'elle engendre; qu'il ne faut point par conséquent prendre pour mesure de la facilité avec laquelle une réaction se produit la grandeur du dégagement calorifique qui l'accompagne, mais plutôt la grandeur de la diminution qu'elle fait subir au potentiel thermodynamique. Dans cet ordre d'idées, on peut obtenir quelques résultats qui sont les suivants.

6. Comme dans l'étude qui a fait l'objet du paragraphe précédent, il importe de distinguer deux cas : celui où le système ne renferme qu'une

(1) Oliver J. Lodge, *Sketch of the principal electrical Papers read before Section A during the late Meeting of the British Association at Manchester* 1887 (*Electrical Review*, 23 septembre 1887).

masse magnétique douée de force coercitive et soumise à une action chimique, et celui où la masse soumise à l'action chimique est une masse dénuée de force coercitive et soumise à l'action d'aimants permanents.

Commençons par donner une relation générale qui s'applique également à ces deux cas.

Supposons qu'une particule superficielle de la masse magnétique ayant pour volume $dx\,dy\,dz$, dont l'aimantation $\mathfrak{M}$ a pour composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, se dissolve de manière à donner un liquide non magnétique et soit remplacée par une particule non magnétique. Si $\mathcal{V}$ désigne la fonction potentielle magnétique en un point $(x, y, z)$ de la particule $dx\,dy\,dz$, il est aisé de voir que le potentiel thermodynamique du système subira la variation suivante :

$$d\Omega = \mathrm{E}d(\mathrm{U}-\mathrm{TS}) + d\mathrm{W} - h\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz - \mathfrak{F}(\mathfrak{M})\,dx\,dy\,dz.$$

Si le système n'était pas aimanté, la même réaction lui ferait subir la variation

$$d_1\Omega = \mathrm{E}d(\mathrm{U}-\mathrm{TS}) + d\mathrm{W}.$$

On a donc

$$(13)\qquad d\Omega - d_1\Omega = -\left[h\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right) + \mathfrak{F}(\mathfrak{M})\right]dx\,dy\,dz.$$

Dans le cas où le corps dissous est un corps doué de force coercitive, il est impossible de préciser le signe du second membre. Mais, si le corps est formé avec l'une quelconque des substances magnétiques ou diamagnétiques dénuées de force coercitive, on peut démontrer, comme nous l'allons voir, que le second membre est positif pour les substances magnétiques et négatif pour les substances diamagnétiques, ce qui permet d'énoncer la proposition suivante :

*La dissolution dans un réactif d'une masse magnétique dénuée de force coercitive et placée dans un champ magnétique entraine une moindre diminution de potentiel thermodynamique que si cette masse n'était pas aimantée. L'inverse a lieu pour une masse diamagnétique.*

Démontrons la proposition pour une masse magnétique; la démonstration est analogue pour une masse diamagnétique.

Les équations de l'induction magnétique

$$\mathcal{A} = -hF(\mathfrak{M})\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x},$$

$$\mathcal{B} = -hF(\mathfrak{M})\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y},$$

$$\mathcal{C} = -hF(\mathfrak{M})\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}$$

permettent de donner à l'égalité (13) la forme suivante :

$$(14) \qquad d\Omega - d_1\Omega = \left[\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M})} - \mathfrak{F}(\mathfrak{M})\right] dx\,dy\,dz.$$

*L'altération que l'aimantation de la particule dissoute fait subir à la variation éprouvée par le potentiel thermodynamique du système dépend uniquement de l'intensité d'aimantation de cette particule.*

L'égalité

$$F(\mathfrak{M}) = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{d\mathfrak{F}}{d\mathfrak{M}}}$$

nous permet d'écrire, en observant que $\mathfrak{M}$ et $F(\mathfrak{M})$ ont des signes constants,

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}) = \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mu)},$$

$\mu$ étant compris entre o et $\mathfrak{M}$. On a alors, au lieu de l'égalité (14),

$$(15) \qquad d\Omega - d_1\Omega = \mathfrak{M}^2\left[\frac{1}{F(\mathfrak{M})} - \frac{1}{2F(\mu)}\right] dx\,dy\,dz.$$

On voit alors directement que $(d\Omega - d_1\Omega)$ sera certainement positif, si, pour toute valeur de $\mu$ comprise entre o et $\mathfrak{M}$, on a

$$2F(\mu) > F(\mathfrak{M}),$$

ce qui aura lieu pour toutes les substances magnétiques connues, puisque, pour toutes ces substances, lorsque l'aimantation croît, le coefficient d'aimantation croît faiblement, décroît ou demeure constant. La même quantité sera négative si l'on a

$$2F(\mu) < F(\mathfrak{M}),$$

ce qui a lieu pour toutes les substances diamagnétiques pour lesquelles la fonction magnétisante est indépendante de l'aimantation ou décroît en valeur absolue lorsque l'aimantation croît; ou bien encore pour celles pour lesquelles elle croîtrait en valeur absolue avec l'aimantation, mais pas assez rapidement pour passer du simple au double.

La proposition que nous avons énoncée tout à l'heure est donc démontrée.

On voit de plus que, si l'on néglige l'influence de l'aimantation sur le coefficient d'aimantation, on aura sensiblement

$$d\Omega - d_1\Omega = \frac{\mathfrak{M}^2}{2F}\,dx\,dy\,dz.$$

*La diminution que subit le potentiel thermodynamique par la dissolution de la particule aimantée est d'autant moindre que l'aimantation de la particule est plus énergique; la quantité dont cette aimantation varie est sensiblement proportionnelle au carré de l'intensité d'aimantation de la particule.*

Ces diverses propositions donnent la théorie des phénomènes observés par M. Remsen et par M. Rowland.

Supposons que $d_1\Omega$ soit négatif, c'est-à-dire que la substance considérée puisse se dissoudre dans le liquide considéré, lorsque cette substance n'est pas aimantée.

Aimantons maintenant la substance. Si l'aimantation est assez énergique, $d\Omega$ pourra, aux points où l'intensité d'aimantation est assez grande, devenir positif; en ces points, la dissolution de la substance magnétique sera impossible; dans l'expérience de M. Remsen, le cuivre ne se déposera pas en ces points; c'est ce qui arrive au voisinage des pôles d'un électro-aimant énergique. Si l'électro-aimant est plus faible, $d\Omega$ demeurera négatif en tout point, et, comme l'a constaté M. Remsen, le cuivre pourra partout se déposer.

S'il existe des régions où $d\Omega$ est positif, c'est-à-dire où le cuivre ne peut se déposer, elles seront séparées des régions où $d\Omega$ est négatif et où l'on peut observer un dépôt de cuivre, par une ligne le long de laquelle on aura

$$d\Omega = 0,$$

c'est-à-dire, d'après l'égalité (14),

$$\mathfrak{M} = \text{const.}$$

*La ligne de séparation entre les régions où le cuivre ne se dépose pas et les régions où il se dépose sera, non pas une ligne équipotentielle, mais une ligne d'égale intensité magnétique.*

Admettons que la vitesse de réaction, mesurée dans l'expérience de M. Remsen par l'épaisseur du dépôt de cuivre, dépende seulement de la diminution de potentiel thermodynamique et croisse avec la grandeur de cette diminution. Les lignes d'égale épaisseur seront données par l'équation

$$d\Omega = \text{const.},$$

ou bien, d'après l'équation (14), par l'équation

$$\mathfrak{M} = \text{const.}$$

*Les lignes le long desquelles le dépôt a une épaisseur constante sont des lignes d'égale intensité magnétique.*

*Pour une substance magnétique, dont le coefficient d'aimantation varie peu avec l'intensité d'aimantation, l'épaisseur du dépôt en un point est d'autant plus grande que l'aimantation est moindre en ce point.*

On obtient ainsi une théorie qui rend compte, d'une façon précise, des principaux phénomènes observés par M. Ira Remsen et M. Rowland.

## § IV. — Chaleur dégagée durant le déplacement d'une masse magnétique.

7. Abordons maintenant l'étude de la quantité de chaleur mise en jeu lorsqu'on déplace dans un champ magnétique une masse magnétique dénuée ou non de force coercitive. Supposons que cette masse magnétique, placée d'abord à distance finie des autres aimants que renferme le système, s'en éloigne ensuite infiniment, et faisons usage de l'égalité (9).

Réservons l'indice (1) aux aimants qui demeurent immobiles et l'indice (2) à la masse déplacée.

Soient

$\mathfrak{V}_1$ la fonction potentielle en un point des aimants (1) du magnétisme distribué sur ces aimants;

$\mathcal{W}_2$ la fonction potentielle en un point de la masse (2) du magnétisme distribué sur cette masse;

$\mathcal{V}_2$ la fonction potentielle en un point de la masse (2) du magnétisme distribué sur les aimants (1).

Nous aurons

$$\begin{aligned}\mathfrak{F} = {} & \frac{h}{2}\int\left(\mathcal{A}_1 \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial x_1} + \mathcal{B}_1 \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial y_1} + \mathcal{C}_1 \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial z_1}\right) dv_1 \\ & + h\int\left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right) dv_2 \\ & + \frac{h}{2}\int\left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial z_2}\right) dv_2.\end{aligned}$$

Supposons que la masse déplacée soit un aimant permanent. Le premier et le troisième terme ne subiront dans le déplacement aucune variation. La valeur finale du second terme sera o. Le terme

$$\mathrm{E}(\mathrm{U} - \mathrm{TS}) + \mathcal{W} + \int \mathfrak{F}(\mathcal{M})\, dv - \int \mathrm{T}\frac{\partial \mathfrak{F}(\mathcal{M})}{\partial \mathrm{T}}\, dv$$

ne subit aucune variation. L'égalité (9) devient alors

$$\mathrm{EQ} = h\int\left(\mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_2}\right) dv_2.$$

*La quantité de chaleur dégagée est simplement équivalente, dans ce cas, au travail effectué par les forces intérieures.*

Ce résultat pouvait se prévoir d'après les principes posés au § I du Chapitre I, puisqu'il s'agit ici d'un déplacement sans changement d'état.

Considérons maintenant le cas où la masse déplacée est dénuée de force coercitive. Dans ce cas, la valeur finale de

$$\mathfrak{F} + \int \mathfrak{F}(\mathcal{M})\, dv$$

se réduit, puisque la masse, éloignée à l'infini, n'est plus aimantée, à

$$\frac{h}{2}\int\left(\mathcal{A}_1 \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial x_1} + \mathcal{B}_1 \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial y_1} + \mathcal{C}_1 \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial z_1}\right) dv_1 + \int \mathfrak{F}_1(\mathcal{M})\, dv_1.$$

On a donc, en vertu de l'égalité (9),

$$\begin{aligned} \mathrm{EQ} = \; & h \int \left( \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ & + \frac{h}{2} \int \left( \mathcal{A}_2 \frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial x_2} + \mathcal{B}_2 \frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial y_2} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial z_2} \right) dv_2 \\ & + \int \mathcal{F}_2(\mathfrak{M}) \, dv_2 - \mathrm{T} \int \frac{\partial \mathcal{F}_2(\mathfrak{M})}{\partial \mathrm{T}} \, dv_2. \end{aligned}$$

Nous avons déjà discuté, au § III, le signe du second membre de cette égalité. Il nous suffit donc de reprendre ici le résultat de cette discussion pour pouvoir énoncer la proposition suivante :

*Lorsqu'une substance magnétique (mais non diamagnétique) se trouve soumise à l'action d'aimants et lorsqu'on l'éloigne ensuite à l'infini, elle absorbe de la chaleur si son coefficient d'aimantation diminue ou demeure constant lorsque la température croît. En dehors des conditions que nous venons d'énoncer, le sens du phénomène thermique produit dans ces circonstances ne peut être prévu sans données numériques.*

Sir W. Thomson [1] a énoncé la proposition suivante : *Une masse magnétique que l'on éloigne d'aimants permanents s'échauffe si son coefficient d'aimantation croît avec la température et se refroidit si son coefficient d'aimantation diminue lorsque la température croît. L'inverse aura lieu pour une masse diamagnétique.*

Cette proposition est d'accord avec la précédente pour le cas d'une masse magnétique dont le coefficient d'aimantation diminue lorsque la température croît; mais l'accord s'arrête là. Lorsqu'on éloigne d'aimants permanents une masse magnétique dont le coefficient d'aimantation est indépendant de la température, la quantité de chaleur dégagée est nulle d'après Sir W. Thomson, tandis qu'elle est négative d'après la proposition précédente.

Nous bornerons à ces remarques nos recherches sur les phénomènes thermiques produits au sein de systèmes qui renferment des aimants.

---

(1) W. Thomson, cité par MASCART et JOUBERT, *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. I, p. 712.

M. Stefan (¹) et M. Waszmuth (²) ont examiné, au point de vue de la Thermodynamique, l'influence qu'exerce l'aimantation sur la chaleur spécifique et sur la chaleur de compression d'un corps; mais, pour les suivre dans cet ordre de recherches, il nous faudrait étudier les déformations des corps aimantés; nous réservons pour un autre Mémoire l'examen des problèmes où figurent ces déformations, nous limitant dans celui-ci aux questions où les corps aimantés peuvent être regardés comme rigides.

(¹) STEFAN, *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. LXIV, IIᵉ Partie, p. 219; 1871.

(²) WASZMUTH, *Sitzungsberichte der Wiener Academie*, t. LXXXV, p. 297 (1882); t. LXXXVI, p. 539 (1882); t. LXXXVII, p. 82 (1883). — *Voir* aussi G. WIEDEMANN, *Die Lehre der Elektricität*, t. III, p. 782.

# CHAPITRE VII.

## PHÉNOMÈNES ÉLECTRIQUES AU SEIN D'UN SYSTÈME QUI RENFERME DES AIMANTS.

### § I. — Potentiel thermodynamique d'un système qui renferme des corps électrisés et des aimants.

1. Jusqu'ici, nous avons supposé que les aimants étudiés par nous ne portaient aucune charge électrique; nous allons nous départir maintenant de cette restriction, de manière à pouvoir étudier quelques questions intéressantes qui se rattachent aux lois de la distribution électrique sur les corps aimantés. En même temps, nous préparerons ainsi la voie à l'étude de l'Électromagnétisme, qui fera l'objet d'un autre Mémoire.

Le premier problème que nous avons à résoudre est celui-ci : former l'expression du potentiel thermodynamique interne d'un système qui renferme des aimants et des corps électrisés sur lesquels les charges électriques sont immobiles.

La forme du potentiel thermodynamique interne d'un système à l'état neutre nous étant connue par le Chapitre I, nous pouvons écrire, en conservant les notations employées dans les Chapitres précédents, que l'on a en général, pour un système électrisé,

$$\mathcal{F} = \mathrm{E}(\mathrm{U} - \mathrm{TS}) + \Upsilon + \int \mathcal{F}(\mathfrak{M})\, dv + \mathcal{F}', \tag{1}$$

$\mathcal{F}'$ étant une quantité qui devient égale à o si toutes les charges électriques du système deviennent égales à o, et toutes les autres quantités ayant la valeur qu'elles doivent avoir dans un système obtenu en amenant à l'état neutre le système donné, sans changer la forme, le volume, la position, l'aimantation, l'état physique ou chimique d'aucun des éléments du système donné.

Pour déterminer $\mathcal{F}'$, suivons la voie que nous avons suivie ailleurs[1] pour parvenir à l'expression du potentiel thermodynamique d'un système électrisé, mais non aimanté.

---

[1] *Le potentiel thermodynamique et ses applications*, IIIe Partie.

Commençons par supposer que l'on déplace les uns par rapport aux autres les divers corps qui constituent le système, en laissant invariables leur volume, leur forme, leur état d'aimantation ou d'électrisation, leur état physique et chimique. Dans ces conditions, les actions mécaniques intérieures au système effectuent un certain travail $d\tau$; et, comme la modification considérée constitue ce que nous avons appelé au § I du Chapitre I *un déplacement sans changement d'état*, on a, d'après le principe énoncé au même endroit,

$$d\mathcal{F} = -d\tau.$$

Or le travail $d\tau$ se compose : 1° du travail des actions mécaniques qui s'exercent, en vertu des lois de Coulomb, entre les divers éléments électrisés du système; 2° du travail des actions mécaniques qui s'exercent, en vertu des lois de Coulomb et de Gauss, entre les divers éléments magnétiques du système.

Si l'on désigne par Y le potentiel électrostatique, le premier travail a pour valeur $-dY$, le second a pour valeur $-d\mathfrak{F}$; on a donc

$$d\mathcal{F} = d(\mathfrak{F} + Y).$$

D'autre part, l'égalité (1) donne

$$d\mathcal{F} = d\mathfrak{F} + d\mathcal{F}'.$$

Par conséquent, dans tout déplacement sans changement d'état, on a

$$d\mathcal{F}' = dY,$$

et l'on peut écrire

(2) $$\mathcal{F}' = Y + \mathcal{F}'',$$

$\mathcal{F}''$ demeurant invariable lorsque les diverses parties du système se déplacent les unes par rapport aux autres, en gardant leur volume, leur forme, leur aimantation et leur électrisation, leur état physique ou chimique; de plus, $\mathcal{F}''$ est égal à 0 lorsque le système est à l'état neutre.

Supposons qu'une charge électrique $dq$ passe dans le système d'un point M à un autre point M', le conducteur étant isotrope en M et en M', la nature de ce conducteur étant la même en chacun des deux points, et l'aimantation ayant la même intensité $\mathfrak{M}$ en chacun de ces deux points.

A cette transformation, nous pouvons substituer la suivante, qui conduit le système du même état initial au même état final et qui, par conséquent, fait subir à $\mathcal{F}''$ la même variation :

Autour du point M, nous découpons une petite sphère portant la charge $dq$; autour du point M', nous découpons une petite sphère identique, mais à l'état neutre; puis nous déplaçons les diverses parties du système les unes par rapport aux autres sans rien changer à leur état, à leur électrisation, à leur aimantation, de telle sorte qu'à la fin de ce déplacement les deux petites sphères se soient substituées l'une à l'autre après avoir été tellement orientées que l'aimantation au point M et au point M' ait gardé la même direction qu'auparavant, et que toutes les autres parties du système aient repris leur position primitive.

D'après ce que nous avons vu il y a un instant, $\mathfrak{F}$ ne varie pas dans cette nouvelle modification; il ne varie donc pas non plus dans la première. Ainsi $\mathfrak{F}$ ne varie pas par le passage d'une charge électrique d'un point à un autre, si le conducteur en ces deux points est isotrope, a la même nature et est aimanté avec la même intensité.

Supposons maintenant qu'une charge électrique $dq$ passe d'un point M en un autre point M'. Le conducteur étant isotrope en ces deux points, mais ayant en ces deux points une nature différente et une intensité d'aimantation différente, $\mathfrak{F}$ éprouve une variation $\Psi\,dq$. Quelles sont les propriétés de la fonction $\Psi$?

Du point M, faisons partir un long fil MN ayant partout la même nature et la même intensité d'aimantation qu'au point M; de même, du point M', faisons partir un long fil M'N' ayant partout la même nature et la même intensité d'aimantation qu'au point N'. Réunissons les extrémités N et N', qui sont à très grande distance du système. Pour faire passer la charge $dq$ du point M au point M', nous pouvons lui faire suivre le trajet MNN'M'; $\mathfrak{F}$ subira toujours la même variation $\Psi\,dq$. Or, comme $\mathfrak{F}$ ne varie ni durant le trajet MN, ni durant le trajet N'M', $\Psi\,dq$ est la variation que subit $\mathfrak{F}$ lorsque la charge $dq$ passe du point M au point M'.

Dès lors, il est facile de voir que $\Psi$ dépend uniquement des intensités d'aimantation en M et M' et de la nature des conducteurs en ces deux points, mais nullement des circonstances présentées par les conducteurs interposés. Il est facile de voir en outre que, si l'on a trois points M, M', M'' en lesquels l'aimantation a des valeurs différentes et les corps électrisés des constitutions différentes, on aura

$$\Psi_{M}^{M''}\,dq = \Psi_{M}^{M'}\,dq + \Psi_{M'}^{M''}\,dq,$$

$\Psi_A^B\,dq$ désignant, d'une manière générale, la variation que subit $\mathfrak{F}''$ lorsque la charge $dq$ passe du point A au point B.

De tout cela il résulte qu'il existe une fonction $f(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ de l'intensité d'aimantation $\mathfrak{M}$ en un point et des coefficients $\alpha, \beta, \ldots$ qui définissent la nature du corps en ce point, telle que l'on ait

$$\Psi_N^M = f(\mathfrak{M}', \alpha', \beta', \ldots) - f(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots),$$

et, par conséquent, en désignant par $\rho$ la densité électrique en un point,

$$(3) \qquad \mathfrak{F}'' = \int \rho f(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)\,dv + \mathfrak{F}''',$$

la fonction $\mathfrak{F}'''$ demeurant invariable lorsque les charges du système et les corps qui le composent se déplacent sans changement d'état physique ou chimique de ses diverses parties, ni d'aimantation de ses diverses substances magnétiques.

Pour déterminer $\mathfrak{F}'''$, nous envisagerons une modification du système dans laquelle certaines de ses parties subissent des changements d'état physique ou chimique ou d'aimantation, et nous chercherons la variation que $\mathfrak{F}'''$ subit dans une telle modification. Dans cette modification, $\mathfrak{F}'''$ subit la même variation que dans une autre modification isothermique conduisant le système du même état initial au même état final.

Voici la modification que nous adopterons :

1° Nous commencerons par faire passer toutes les charges électriques sur l'un des corps qui n'éprouvent aucune modification dans cette première transformation; $\mathfrak{F}'''$ ne variera pas.

2° Nous éloignerons le corps ainsi électrisé à une distance infinie du reste du système ramené à l'état neutre; dans cette deuxième transformation, $\mathfrak{F}'''$ ne variera pas.

3° Nous supposerons que le système subisse alors le changement d'état physique et chimique et d'aimantation que nous avons en vue; dans cette modification, la variation subie par $\mathfrak{F}'''$ sera évidemment la somme des variations subies, durant la même modification, par les fonctions $\mathfrak{F}'''$ de deux systèmes partiels, l'un formé par la partie du système total que l'on a emmenée à l'infini, l'autre formé par la partie du système total qui est demeurée à distance finie. Or le premier système partiel ne subissant aucune variation, sa fonction $\mathfrak{F}'''$ demeure constante; quant au second système par-

tiel, il est à l'état neutre; sa fonction $\mathfrak{F}''$ est donc et demeure égale à o. Ainsi, dans la troisième phase de notre modification, la fonction $\mathfrak{F}''$ relative au système total ne subit aucune variation.

4° Nous ramenons de l'infini le corps qui y avait été emmené, nous restituons à chacun des conducteurs les charges électriques qu'il doit porter à la fin de la modification; $\mathfrak{F}''$ ne subit encore aucune variation.

De tout cela, nous devons conclure que $\mathfrak{F}''$ ne varie dans aucune modification, ce qu'exprime l'égalité

$$\mathfrak{F}'' = \text{const.} \tag{4}$$

Les égalités (1), (2), (3), (4) déterminent $\mathfrak{F}$. Si nous posons

$$f(0, \alpha, \beta, \ldots) = \Theta(\alpha, \beta, \ldots)$$

et

$$f(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) = \Theta(\alpha, \beta, \ldots) + \mathcal{G}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots),$$

nous aurons

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} = {} & \mathrm{E}(\mathrm{U} - \mathrm{TS}) + \mathfrak{I} + \Upsilon \\ & + \int [\mathfrak{I}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) + \rho\mathcal{G}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) + \rho\Theta(\alpha, \beta, \ldots)]\, dv + \text{const.} \end{aligned} \tag{5}$$

Telle est l'expression du potentiel thermodynamique interne d'un système électrisé et aimanté.

Il faut bien remarquer que le raisonnement qui nous a conduit à ce résultat suppose que les actions internes d'un système électrisé et aimanté se réduisent aux actions mutuelles des particules magnétiques et aux actions mutuelles des particules électrisées données par la loi de Coulomb. S'il existait une action mutuelle des particules aimantées et des particules électrisées, le potentiel thermodynamique contiendrait un nouveau terme qui serait le potentiel de ces actions.

## § II. — Équations de l'équilibre électrique et de l'équilibre magnétique.

2. Cette formule étant obtenue, proposons-nous de déterminer les lois de l'équilibre électrique et de l'équilibre magnétique sur un des corps du système supposé conducteur et dénué de force coercitive.

Pour déterminer les conditions de l'équilibre électrique, nous allons supposer qu'une charge $dq$ passe d'un point M du système en un autre point M',

et nous égalerons à o la variation subie par le potentiel thermodynamique interne du système. Soient

V la fonction potentielle électrique au point M;
V' la fonction potentielle électrique au point M';
$\varepsilon$ le coefficient positif et constant qui figure dans la formule

$$F = \varepsilon \frac{qq'}{r^2},$$

par laquelle on exprime l'action mutuelle de deux charges électriques à la distance $r$;
$\mathfrak{M}$ l'intensité d'aimantation au point M;
$\mathfrak{M}'$ l'intensité d'aimantation au point M'.

La condition dont il s'agit sera la suivante :

$$(6)\quad \varepsilon V + \Theta(\alpha, \beta, \ldots) + \mathcal{G}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) = \varepsilon V' + \Theta(\alpha', \beta', \ldots) + \mathcal{G}(\mathfrak{M}', \alpha', \beta', \ldots).$$

Si l'aimantation était nulle en ces deux points, on aurait

$$\varepsilon V + \Theta(\alpha, \beta, \ldots) = \varepsilon V' + \Theta(\alpha', \beta', \ldots).$$

*La différence de niveau potentiel entre deux points d'un conducteur électrisé et aimanté varie avec l'intensité de l'aimantation en ces deux points.*

Ce théorème n'a rien qui nous doive surprendre. L'intensité d'aimantation en chaque point étant un des paramètres qui définissent l'état du système, il est simplement un cas particulier de celui-ci : la différence du niveau potentiel entre deux corps dépend de l'état de ces deux corps.

Remarquons que la variation dont il s'agit ici suppose qu'en faisant varier l'aimantation, on maintienne invariables la densité, l'état physique et chimique du conducteur. Si l'on fait varier l'état d'aimantation d'un conducteur en maintenant constante la pression qu'il supporte, ses dimensions varient, ainsi que l'a montré M. Joule. Il en résulte en ses divers points des changements de densité et, partant, entre ces divers points, des changements de différence de niveau potentiel qui ne sont dues qu'indirectement au changement d'aimantation et qui ne sont point considérés ici.

Supposons que le conducteur au point M' soit formé par une substance

non magnétique. On a alors

$$\mathcal{G}(\mathfrak{M}', \alpha', \beta', \ldots) = 0.$$

Soit D la différence de niveau potentiel entre le point M et la substance non magnétique qui se trouve en M'. L'égalité (6) peut encore s'écrire

$$(7) \qquad \varepsilon D = \Theta'(\alpha', \beta', \ldots) - \Theta(\alpha, \beta, \ldots) - \mathcal{G}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots).$$

Pour déterminer les conditions de l'équilibre magnétique, faisons varier de $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$ les composantes de l'aimantation à l'intérieur d'un élément de volume du système; soient $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique et $\rho$ la densité électrique en ce point. Le potentiel thermodynamique interne subira alors la variation suivante

$$(8) \qquad \delta\mathcal{F} = h\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\delta\mathcal{A} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\delta\mathcal{B} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\delta\mathcal{C}\right)dx\,dy\,dz$$
$$+ \frac{1}{\mathfrak{M}}\left[\frac{\partial\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\mathfrak{M}} + \rho\frac{\partial\mathcal{G}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\mathfrak{M}}\right](\mathcal{A}\,\delta\mathcal{A} + \mathcal{B}\,\delta\mathcal{B} + \mathcal{C}\,\delta\mathcal{C})\,dx\,dy\,dz.$$

En égalant à o cette variation, on obtiendra les conditions cherchées. Si l'on pose

$$(8) \qquad F(\mathfrak{M}, \rho, \alpha, \beta, \ldots) = \frac{\mathfrak{M}}{\dfrac{\partial\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\mathfrak{M}} + \rho\dfrac{\partial\mathcal{G}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial\mathfrak{M}}},$$

ces conditions seront

$$(9) \qquad \begin{cases} \mathcal{A} = -hF(\mathfrak{M}, \rho, \alpha, \beta, \ldots)\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}, \\ \mathcal{B} = -hF(\mathfrak{M}, \rho, \alpha, \beta, \ldots)\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}, \\ \mathcal{C} = -hF(\mathfrak{M}, \rho, \alpha, \beta, \ldots)\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}. \end{cases}$$

Ces égalités montrent que *la fonction magnétisante en un point d'une substance dénuée de force coercitive dépend de la densité électrique en ce point,* théorème que nous pouvions, comme le précédent, prévoir *a priori*.

La comparaison des égalités (7) et (8) donne

$$(9) \qquad \varepsilon\frac{\partial D}{\partial\mathfrak{M}} = -h\mathfrak{M}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{F(\mathfrak{M}, \rho, \alpha, \beta, \ldots)}\right],$$

relation remarquable entre la variation de différence de niveau potentiel électrique par l'aimantation et la variation de la force magnétisante par l'électrisation.

Cette relation peut s'énoncer ainsi :

*Lorsque la densité électrique varie en un point d'un corps aimanté, la fonction magnétisante subit des variations; ces variations sont de même signe que celles que subit, par l'effet d'un accroissement de l'intensité d'aimantation, la différence de niveau potentiel entre ce corps aimanté et un corps non aimanté quelconque.*

*Le quotient de cette dernière variation par l'intensité d'aimantation est proportionnel à la variation subie par l'inverse de la fonction magnétisante.*

Les considérations précédentes pourraient servir de base à une étude mathématique complète de l'équilibre simultané de l'électricité et du magnétisme. Mais la longueur et la complication de cette étude n'auraient même pas pour excuse l'importance du sujet, puisque jusqu'ici il n'a donné lieu à aucune recherche expérimentale. Aussi, laissant de côté cette étude, nous nous bornerons à l'examen de quelques questions ayant un intérêt physique.

## § III. — Influence de l'aimantation sur la force électromotrice d'une pile.

3. Considérons, en premier lieu, un morceau de fer doux placé dans un champ magnétique et plongé dans une solution d'un sel de fer, de sulfate de fer par exemple, dont nous négligerons les propriétés magnétiques.

Considérons à la surface de ce morceau de fer en contact avec la dissolution deux points M et M'. Supposons qu'une quantité d'électricité $dq$ passe du point M au point M' au travers de la dissolution. Ce déplacement entraîne la dissolution au point M d'un poids de fer $\lambda\, dq$ et le dépôt au point M' d'un poids de fer égal, $\lambda$ étant une constante positive proportionnelle au poids moléculaire du métal.

Pour que l'équilibre électrique ait lieu sur le morceau de fer doux considéré, il faut en général que la modification virtuelle précédente, qui n'entraîne aucun travail externe si la seule force à laquelle le système est soumis est une pression normale et uniforme, n'entraîne aucune variation du potentiel thermodynamique interne du système.

Or on a, d'après l'égalité (5),

$$d\mathcal{F} = \mathrm{E}\,d(\mathrm{U}-\mathrm{TS}) + d\mathrm{Y} + d\mathfrak{J}$$
$$+ d\int [\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) + \rho\,\mathcal{G}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) + \rho\,\Theta(\alpha, \beta, \ldots)]\,dv.$$

Calculons les divers termes du second membre de cette égalité.

La dissolution en un point d'un certain poids de fer et la précipitation en un autre point d'un même poids de fer, que nous supposerons précipité dans un état physique et chimique identique, ne peut faire varier le terme $(\mathrm{U}-\mathrm{TS})$.

La variation du terme Y est donnée par la formule

$$d\mathrm{Y} = \varepsilon(\mathrm{V}' - \mathrm{V})\,dq,$$

V étant la fonction potentielle électrique au point M et V′ la fonction potentielle électrique au point M′.

La variation $d\mathfrak{J}$ du potentiel magnétique est la somme de deux autres variations, l'une due simplement à la suppression d'une particule de fer $\lambda\,dq$ au point M, l'autre de l'addition d'une particule de fer égale au point M′.

Étudions d'abord la première variation. La particule de fer de poids $\lambda\,dq$ enlevée au point M occupe un volume $\frac{\lambda\,dq}{\delta}$, $\delta$ étant le poids spécifique du fer. Si cette suppression ne faisait point varier l'aimantation du morceau de fer, elle ferait diminuer $\mathfrak{J}$ de

$$-h\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_i} + \mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y_i} + \mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z_i}\right)\frac{\lambda\,dq}{\delta},$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ étant les composantes de l'aimantation en un point $x_i, y_i, z_i$ intérieur au morceau de fer doux et infiniment voisin du point $\mathfrak{M}$, et $\mathcal{V}$ la fonction potentielle magnétique au même point. Mais, de plus, cette suppression fait varier la forme du morceau de fer doux, par suite l'aimantation en chaque point. Si $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{C}_2$, composantes de l'aimantation au point $x_2, y_2, z_2$ du fer doux, varient ainsi de $d\mathcal{A}_2$, $d\mathcal{B}_2$, $d\mathcal{C}_2$, $\mathfrak{J}$ varie de

$$h\int\left(d\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_2} + d\mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y_2} + d\mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z_2}\right)dv_2,$$

l'intégration s'étendant au volume entier du fer doux.

Si le fer qui se précipite au point M′ est parfaitement doux, il prendra une aimantation ayant pour composantes $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, et la deuxième partie

de la variation de $\mathcal{F}$ aura pour valeur

$$h\left(\mathcal{A}'\frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial x'_1}+\mathcal{B}'\frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial y'_1}+\mathcal{C}'\frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial z'_1}\right)\frac{\lambda\,dq}{\delta}+h\int\left(d'\mathcal{A}_2\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_2}+d'\mathcal{B}_2\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y_2}+d'\mathcal{C}_2\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z_2}\right)dv_2.$$

Enfin le terme

$$d\int[\mathcal{F}(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)+\rho\,\mathcal{G}(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)+\rho\,\Theta(\alpha,\beta,\ldots)]\,dv$$

aura pour valeur

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{F}(\mathfrak{M}',\alpha,\beta,\ldots)-\mathcal{F}(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)]\frac{\lambda\,dq}{\delta}\\
&\quad+\int\frac{1}{\mathfrak{M}_2}\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\mathfrak{M}_2}(\mathcal{A}_2\,d\mathcal{A}_2+\mathcal{B}_2\,d\mathcal{B}_2+\mathcal{C}_2\,d\mathcal{C}_2)\,dv_2\\
&\quad+\int\frac{1}{\mathfrak{M}_2}\frac{\partial\mathcal{F}_2}{\partial\mathfrak{M}_2}(\mathcal{A}_2\,d'\mathcal{A}_2+\mathcal{B}_2\,d'\mathcal{A}_2+\mathcal{C}_2\,d'\mathcal{C}_2)\,dv_2\\
&\qquad+[\mathcal{G}(\mathfrak{M}',\alpha,\beta,\ldots)-\mathcal{G}(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)]\,dq\\
&\quad+\int\frac{\rho}{\mathfrak{M}_2}\frac{\partial\mathcal{G}_2}{\partial\mathfrak{M}_2}(\mathcal{A}_2\,d\mathcal{A}_2+\mathcal{B}_2\,d\mathcal{B}_2+\mathcal{C}_2\,d\mathcal{C}_2)\,dv_2\\
&\quad+\int\frac{\rho}{\mathfrak{M}_2}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\mathfrak{M}_2}(\mathcal{A}_2\,d'\mathcal{A}_2+\mathcal{B}_2\,d'\mathcal{B}_2+\mathcal{C}_2\,d'\mathcal{C}_2)\,dv_2.
\end{aligned}$$

On a donc, en résumé,

$$\begin{aligned}
d\mathcal{F}=\Big[\;&h\left(\mathcal{A}'\frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial x'}+\mathcal{B}'\frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial y'}+\mathcal{C}'\frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial z'}\right)+\mathcal{F}(\mathfrak{M}',\alpha,\beta,\ldots)\\
&-h\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\right)-\mathcal{F}(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)\Big]\frac{\lambda\,dq}{\delta}\\
&+[\varepsilon V'+\mathcal{G}(\mathfrak{M}',\alpha,\beta,\ldots)-\varepsilon V-\mathcal{G}(\mathfrak{M},\alpha,\beta,\ldots)]\,dq\\
&+\int\Big\{\left[h\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x_2}+\left(\frac{1}{\mathfrak{M}_2}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathfrak{M}_2}+\frac{\rho}{\mathfrak{M}_2}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\mathfrak{M}_2}\right)\mathcal{A}_2\right](d\mathcal{A}_2+d'\mathcal{A}_2)\\
&\quad+\left[h\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y_2}+\left(\frac{1}{\mathfrak{M}_2}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathfrak{M}_2}+\frac{\rho}{\mathfrak{M}_2}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\mathfrak{M}_2}\right)\mathcal{B}_2\right](d\mathcal{B}_2+d'\mathcal{B}_2)\\
&\quad+\left[h\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z_2}+\left(\frac{1}{\mathfrak{M}_2}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathfrak{M}_2}+\frac{\rho}{\mathfrak{M}_2}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\mathfrak{M}_2}\right)\mathcal{C}_2\right](d\mathcal{C}_2+d'\mathcal{C}_2)\Big\}\,dv_2.
\end{aligned}$$

Mais, en vertu des égalités (8) et (9), le dernier terme se trouve être égal

à o. Les mêmes égalités donnent

$$h\left(\mathcal{A}'\frac{\partial \mathcal{V}'}{\partial x'} + \mathcal{B}'\frac{\partial \mathcal{V}'}{\partial y'} + \mathcal{C}'\frac{\partial \mathcal{V}'}{\partial z'}\right) = -\frac{\mathfrak{M}'^2}{F(\mathfrak{M}', \rho')},$$

$$h\left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right) = -\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \rho)}.$$

En égalant à o l'expression précédente de $d\mathfrak{F}$, on trouve

$$(11)\qquad \varepsilon V + \mathcal{G}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) + \frac{\lambda}{\delta}\left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) - \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \rho, \alpha, \beta, \ldots)}\right]$$
$$= \varepsilon V' + \mathcal{G}(\mathfrak{M}', \alpha, \beta, \ldots) + \frac{\lambda}{\delta}\left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}', \alpha, \beta, \ldots) - \frac{\mathfrak{M}'^2}{F(\mathfrak{M}', \alpha, \beta, \ldots)}\right];$$

telle est la condition d'équilibre que l'on obtient en envisageant une modification virtuelle dans laquelle l'électricité passe du point M au point M' en traversant l'électrolyte.

Si l'on suppose, au contraire, que l'électricité passe du point M au point M' en traversant le fer doux, on trouve la condition d'équilibre

$$(12)\qquad \varepsilon V + \mathcal{G}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) = \varepsilon V' + \mathcal{G}(\mathfrak{M}', \alpha, \beta, \ldots).$$

Ces conditions (11) et (12) ne sont pas compatibles en général, car elles exigent que l'on ait

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) - \frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M}, \rho, \alpha, \beta, \ldots)} = \mathfrak{F}(\mathfrak{M}', \alpha, \beta, \ldots) - \frac{\mathfrak{M}'^2}{F(\mathfrak{M}', \rho, \alpha, \beta, \ldots)},$$

ce qui n'aura point lieu ordinairement, à moins que l'on n'ait

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}',$$
$$\rho = \rho'.$$

Ainsi, *si une masse de fer doux, placée dans un champ magnétique et plongée dans un électrolyte, présente la même aimantation et la même densité électrique en tous les points de sa surface, l'équilibre électrique sera possible sur cette masse; si ces conditions ne sont pas réalisées, l'équilibre électrique sera en général impossible : des courants particulaires s'établiront d'un point à l'autre de la masse.*

Supposons dorénavant la densité électrique assez faible pour pouvoir négliger le terme $\rho\mathcal{G}(\mathfrak{M})$ et demandons-nous si le courant particulaire ira, au sein de l'électrolyte, du point M au point M' ou du point M' au point M.

On sait qu'il ira, au travers de l'électrolyte, du point M' au point M si, dans ces conditions, le travail non compensé effectué sur son parcours tout entier est positif. Or ce travail non compensé a pour valeur

$$\left\{\left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M})-\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M})}\right]-\left[\mathfrak{F}(\mathfrak{M}')-\frac{\mathfrak{M}'^2}{F(\mathfrak{M}')}\right]\right\}\frac{\lambda\, dq}{\delta}.$$

Négligeons les variations de la fonction magnétisante avec l'aimantation et posons simplement

$$F(\mathfrak{M}) = F.$$

La quantité précédente deviendra

$$\frac{\mathfrak{M}'^2-\mathfrak{M}^2}{2F}.$$

On voit alors que le courant ira, au travers de l'électrolyte, des points les moins aimantés aux points les plus aimantés; en d'autres termes, les régions les moins aimantées seront électronégatives par rapport aux régions les plus fortement aimantées.

Des considérations semblables s'appliquent évidemment au cas où les points M et M' appartiendraient à deux morceaux de fer doux distincts. Ainsi, *si dans un sel de fer on plonge deux morceaux de fer doux inégalement aimantés par un champ magnétique, le plus fortement aimanté sera électropositif par rapport au plus faiblement aimanté. L'inverse aura lieu pour un corps diamagnétique.*

Ce phénomène a été constaté, en premier lieu, par M. Gross ([1]). Ils ont été vérifiés, plus récemment, par M. Rowland ([2]).

Il en résulte évidemment que la force électromotrice d'une pile qui renferme une électrode en fer doux ne doit pas être la même suivant qu'on place cette pile à l'intérieur d'un champ magnétique ou en dehors de ce champ. M. Paul Janet ([3]) a, le premier, déduit cette conséquence d'idées théoriques.

---

([1]) Th. Gross, *Ueber eine neue Entstehungsweise galvanischer Ströme durch Magnetismus* (*Verhandl. d. phys. Ges. in Berlin*, p. 33; 1885. *Beiblätter*, t. IX, p. 540; 1885, et t. X, p. 425; 1886. *Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, 2e série, t. XCII, p. 1378; 1886).

([2]) Oliver J. Lodge, *Sketch of the principal electrical Papers read before Section A during the late Meeting of the British Association at Manchester* 1887 (*Electrical Review*, 23 septembre 1877).

([3]) P. Janet, *De l'influence du magnétisme sur les phénomènes chimiques* (*Journal de Physique*, 2e série, t. VI, p. 286; 1887).

Les principes précédemment posés permettent de traiter très complètement la question soulevée par les recherches de M. Paul Janet. Supposons que le fer doux forme l'électrode négative d'une pile dont l'électrode positive est formée d'un métal non magnétique, de cuivre par exemple; nous supposerons la pile placée dans un champ magnétique et la forme de ce champ et de l'électrode de fer choisie de telle sorte que l'aimantation de l'électrode de fer soit uniforme; nous supposerons, en outre, la quantité $\rho\mathcal{G}(\mathfrak{M})$ négligeable; de cette façon, nous serons assurés qu'il n'y a pas de courants particulaires d'un point à l'autre de la masse de fer doux.

Cela étant, supposons qu'une charge électrique $dq$ passe du fer au cuivre au travers de la dissolution : un poids $\lambda\, dq$ de fer est dissous; un poids équivalent de cuivre est précipité. Dans ces conditions, le potentiel thermodynamique total

$$\Omega = \mathcal{F} + W$$

du système subit une variation qui, pour l'équilibre, doit être égale à o. Si l'on distingue par des accents les quantités qui se rapportent au cuivre, on obtient ainsi l'égalité

$$o = (\varepsilon V' + \Theta' - \varepsilon V - \Theta)\, dq + E\, d(U - TS) + dW - \frac{\lambda}{\delta}\left[\mathcal{F}(\mathfrak{M}) - \mathfrak{M}\frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M})}{\partial \mathfrak{M}}\right] dq.$$

Si la masse de fer doux et la masse de cuivre étaient en contact par un conducteur et non par un électrolyte, la condition d'équilibre serait

$$\varepsilon V'_1 + \Theta' - \varepsilon V_1 - \Theta = o.$$

La quantité

$$\mathcal{E} = \varepsilon(V' - V) - \varepsilon(V'_1 - V_1)$$

est, d'après la théorie de la pile constituée par les travaux de MM. Gibbs et H. von Helmholtz, la force électromotrice de la pile considérée. On a alors

$$\mathcal{E}\, dq = -E\, d(U - TS) - dW + \frac{\lambda}{\delta}\left[\mathcal{F}(\mathfrak{M}) - \mathfrak{M}\frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M})}{\partial \mathfrak{M}}\right] dq.$$

Supposons cette pile soustraite à l'action du champ magnétique, elle aura pour nouvelle force électromotrice la quantité $\mathcal{E}_1$, donnée par

$$\mathcal{E}_1 = -E\, d(U - TS) - dW.$$

On a donc

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \frac{\lambda}{\delta}\left[\mathcal{F}(\mathfrak{M}) - \mathfrak{M}\frac{\partial \mathcal{F}(\mathfrak{M})}{\partial \mathfrak{M}}\right]. \tag{13}$$

*Si l'on place dans un champ magnétique une pile renfermant pour électrode négative une masse de fer doux susceptible de s'aimanter uniformément, la force électromotrice de cette pile subit une variation qui dépend exclusivement de la nature du fer doux et de l'intensité de son aimantation; l'effet change de sens sans changer de grandeur si l'électrode en fer doux est prise pour électrode négative.*

Si l'on désigne par $\mu$ une certaine quantité comprise entre o et $\mathfrak{M}$, l'égalité précédente peut s'écrire

$$(14) \qquad \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \frac{\lambda}{\delta}\left[\frac{\mathfrak{M}^2}{F(\mathfrak{M})} - \frac{\mathfrak{M}^2}{2F(\mu)}\right].$$

On voit alors que, *pour toutes les substances magnétiques connues, l'aimantation diminue la force électromotrice de la pile si la substance magnétique forme l'électrode négative et l'augmente si la substance magnétique forme l'électrode positive. L'inverse a lieu pour les substances diamagnétiques.*

Si l'on néglige les variations de la fonction magnétisante avec l'aimantation, l'égalité précédente devient simplement

$$(15) \qquad \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \frac{\lambda}{2\delta}\frac{\mathfrak{M}^2}{F}.$$

*La variation subie par la force électromotrice est proportionnelle au carré de l'intensité d'aimantation de l'électrode et en raison inverse de son coefficient d'aimantation.*

Ces quelques propositions contribueront, nous l'espérons, à jeter quelque jour sur cette question, à peine ébauchée encore au point de vue expérimental, de l'influence de l'aimantation sur les phénomènes chimiques, et à compléter les vues théoriques émises par M. P. Janet.

# CHAPITRE VIII.

## AIMANTATION DES CRISTAUX.

### § I. — Potentiel thermodynamique d'un système qui renferme des cristaux aimantés.

1. Dans la détermination du potentiel thermodynamique interne d'un système qui renferme des aimants, nous avons introduit la restriction que tous les corps aimantés du système étaient des corps isotropes. Nous allons maintenant nous affranchir de cette restriction.

Nous pouvons, comme au § III du Chapitre I, écrire

$$\dot{\mathcal{F}} = \mathcal{F} + \mathcal{F}',$$

et, comme au lieu que nous venons de citer, nous trouverons que si les composantes de l'aimantation au sein d'un volume $dv$ du système subissent des variations $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$, l'élément demeurant fixe, $\mathcal{F}'$ subit une variation

$$\delta\mathcal{F}' = \mathrm{A}\,\delta\mathcal{A} + \mathrm{B}\,\delta\mathcal{B} + \mathrm{C}\,\delta\mathcal{C},$$

A, B, C étant trois quantités qui peuvent dépendre :

1° De $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$;

2° Du volume $dv$ de l'élément;

3° De la forme de la surface qui le limite;

4° De l'orientation de l'aimantation à l'intérieur de la substance, orientation déterminée par les cosinus des angles que la direction de l'aimantation fait avec trois directions liées à l'élément, par exemple ses trois axes d'élasticité;

5° Des coefficients $\alpha$, $\beta$, ... qui définissent l'état de la substance en un point de l'élément.

Soient $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ les composantes de l'aimantation suivant les axes d'élasticité de l'élément. Les cosinus des angles que la direction de l'aimantation fait avec ces axes auront pour valeur respective

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}}, \quad \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}}, \quad \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}},$$

Dès lors, en raisonnant comme au § III du Chapitre I, nous verrons sans peine que les quantités A, B, C sont :

1° Indépendantes de la forme de la surface de l'élément;

2° Proportionnelles à son volume $dv$;

3° Fonctions de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\alpha$, $\beta$, ....

Soient $\theta$, $\varphi$, $\psi$ les trois angles d'Euler qui fixent la position des axes d'élasticité de l'élément par rapport aux axes des coordonnées. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ pourront s'exprimer en fonction de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et de $\theta$, $\varphi$, $\psi$. Dans la transformation considérée, $\theta$, $\varphi$, $\psi$ demeurent constants, en sorte que $\delta\mathcal{A}$, $\delta\mathcal{B}$, $\delta\mathcal{C}$ s'expriment en fonction linéaire de $\delta\mathfrak{A}$, $\delta\mathfrak{B}$, $\delta\mathfrak{C}$, et l'on peut écrire

$$\delta\mathcal{F}' = (A'\,\delta\mathfrak{A} + B'\,\delta\mathfrak{B} + C'\,\delta\mathfrak{C})\,dv,$$

A', B', C' étant trois fonctions de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\theta$, $\varphi$, $\psi$, $\alpha$, $\beta$, ....

Dans la modification qui donne cette expression de $\delta\mathcal{F}'$, $\theta$, $\varphi$, $\psi$ demeurent constants. Supposons maintenant que, sans rien changer à l'aimantation ou à l'état de l'élément, on le fasse tourner sur lui-même; $\theta$, $\varphi$, $\psi$ varient seuls. Or, dans ce déplacement sans changement d'état, $\mathcal{F}'$ ne doit pas varier. $\mathcal{F}'$ est donc indépendant de $\theta$, $\varphi$, $\psi$ et l'on a

$$\mathcal{F}' = \int \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots)\,dv + \mathcal{F}'',$$

$\mathcal{F}''$ ne variant pas lorsque l'état physique et chimique du système demeure invariable. $\mathcal{F}''$ se déterminera alors comme au Chapitre I et l'on aura, pour un système qui renferme des cristaux aimantés,

$$\mathcal{F} = E(U - TS) + \Upsilon + \int \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots)\,dv. \tag{1}$$

Pour un corps isotrope, la fonction $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots)$ se réduit à la fonction $\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ que nous avons eue à considérer dans tous les Chapitres précédents.

A la fin du Chapitre II, nous avons vu que l'on avait [égalité (13)]

$$\mathcal{F}(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots) = \frac{1}{2\,\Gamma(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)}\,\mathfrak{M}^2,$$

$\Gamma(\mathfrak{M}, \alpha, \beta, \ldots)$ tendant vers une limite finie lorsque $\mathfrak{M}$ tend vers o. Généralisant ce résultat, nous admettrons que le rapport

$$\frac{\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots)}{\mathfrak{M}^2}$$

tend vers une limite finie lorsque $\mathcal{M}$ tend vers o, ce qui suppose que l'on ait

$$(2)\quad \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = \varphi_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{A}^2 + \varphi_{22}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{B}^2 + \varphi_{33}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{C}^2 \\ + 2\varphi_{23}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{B}\mathfrak{C} + 2\varphi_{31}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{C}\mathfrak{A} + 2\varphi_{12}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

les quantités $\varphi_{pq}$ demeurant finies pour $\mathcal{A} = o$, $\mathcal{B} = o$, $\mathcal{C} = o$.

L'étude de cette forme nous amènera parfois à considérer la surface du second ordre

$$(3)\quad \varphi_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})x^2 + \varphi_{22}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})y^2 + \varphi_{33}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})z^2 \\ + 2\varphi_{23}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})yz + 2\varphi_{31}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})zx + 2\varphi_{12}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})xy = 1,$$

*surface variable avec la grandeur et l'orientation de l'intensité d'aimantation* à laquelle nous donnerons le nom de *surface d'induction magnétique* du cristal.

## § II. — Équations de l'équilibre magnétique.

2. Supposons maintenant qu'à l'intérieur de l'élément $dx\,dy\,dz$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ varient de quantités arbitraires $\delta\mathfrak{A}$, $\delta\mathfrak{B}$, $\delta\mathfrak{C}$. Soient $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ les directions des axes d'élasticité de l'élément $dx\,dy\,dz$. En égalant à o la variation subie par la fonction $\mathcal{F}$, nous trouverons

$$(4)\quad \begin{cases} h\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} + \dfrac{\partial}{\partial \mathfrak{A}}\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots) = o, \\ h\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} + \dfrac{\partial}{\partial \mathfrak{B}}\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots) = o, \\ h\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta} + \dfrac{\partial}{\partial \mathfrak{C}}\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \alpha, \beta, \ldots) = o. \end{cases}$$

Ce sont les équations fondamentales de l'équilibre magnétique sur une substance cristalline.

L'égalité (2) permet de transformer ces équations; elle nous donne, en effet :



$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial\mathfrak{A}} &= 2(\varphi_{11}\mathfrak{A}+\varphi_{12}\mathfrak{B}+\varphi_{13}\mathfrak{C})\\
&\quad+\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial\mathfrak{A}}\mathfrak{A}^2+\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial\mathfrak{A}}\mathfrak{B}^2+\frac{\partial\varphi_{33}}{\partial\mathfrak{A}}\mathfrak{C}^2+2\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial\mathfrak{A}}\mathfrak{B}\mathfrak{C}+2\frac{\partial\varphi_{31}}{\partial\mathfrak{A}}\mathfrak{C}\mathfrak{A}+2\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial\mathfrak{A}}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\right),\\
\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial\mathfrak{B}} &= 2(\varphi_{21}\mathfrak{A}+\varphi_{22}\mathfrak{B}+\varphi_{23}\mathfrak{C})\\
&\quad+\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial\mathfrak{B}}\mathfrak{A}^2+\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial\mathfrak{B}}\mathfrak{B}^2+\frac{\partial\varphi_{33}}{\partial\mathfrak{B}}\mathfrak{C}^2+2\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial\mathfrak{B}}\mathfrak{B}\mathfrak{C}+2\frac{\partial\varphi_{31}}{\partial\mathfrak{B}}\mathfrak{C}\mathfrak{A}+2\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial\mathfrak{B}}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\right),\\
\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial\mathfrak{C}} &= 2(\varphi_{31}\mathfrak{A}+\varphi_{32}\mathfrak{B}+\varphi_{33}\mathfrak{C})\\
&\quad+\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial\mathfrak{C}}\mathfrak{A}^2+\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial\mathfrak{C}}\mathfrak{B}^2+\frac{\partial\varphi_{33}}{\partial\mathfrak{C}}\mathfrak{C}^2+2\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial\mathfrak{C}}\mathfrak{B}\mathfrak{C}+2\frac{\partial\varphi_{31}}{\partial\mathfrak{C}}\mathfrak{C}\mathfrak{A}+2\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial\mathfrak{C}}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\right),
\end{aligned}\right.$$

égalités dans lesquelles $\varphi_{pq}$ et $\varphi_{qp}$ ont la même signification que dans l'égalité (2). Moyennant ces égalités (5), les égalités (4) vont prendre la forme suivante :

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
h\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\xi} &+\left(2\varphi_{11}+\mathfrak{A}\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial\mathfrak{A}}+\mathfrak{B}\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial\mathfrak{A}}+\mathfrak{C}\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial\mathfrak{A}}\right)\mathfrak{A}\\
&+\left(2\varphi_{12}+\mathfrak{A}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial\mathfrak{A}}+\mathfrak{B}\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial\mathfrak{A}}+\mathfrak{C}\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial\mathfrak{A}}\right)\mathfrak{B}\\
&+\left(2\varphi_{13}+\mathfrak{A}\frac{\partial\varphi_{31}}{\partial\mathfrak{A}}+\mathfrak{B}\frac{\partial\varphi_{32}}{\partial\mathfrak{A}}+\mathfrak{C}\frac{\partial\varphi_{33}}{\partial\mathfrak{A}}\right)\mathfrak{C}=0,\\
h\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\eta} &+\left(2\varphi_{21}+\mathfrak{A}\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial\mathfrak{B}}+\mathfrak{B}\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial\mathfrak{B}}+\mathfrak{C}\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial\mathfrak{B}}\right)\mathfrak{A}\\
&+\left(2\varphi_{22}+\mathfrak{A}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial\mathfrak{B}}+\mathfrak{B}\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial\mathfrak{B}}+\mathfrak{C}\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial\mathfrak{B}}\right)\mathfrak{B}\\
&+\left(2\varphi_{23}+\mathfrak{A}\frac{\partial\varphi_{31}}{\partial\mathfrak{B}}+\mathfrak{B}\frac{\partial\varphi_{32}}{\partial\mathfrak{B}}+\mathfrak{C}\frac{\partial\varphi_{33}}{\partial\mathfrak{B}}\right)\mathfrak{C}=0,\\
h\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial\zeta} &+\left(2\varphi_{31}+\mathfrak{A}\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial\mathfrak{C}}+\mathfrak{B}\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial\mathfrak{C}}+\mathfrak{C}\frac{\partial\varphi_{13}}{\partial\mathfrak{C}}\right)\mathfrak{A}\\
&+\left(2\varphi_{32}+\mathfrak{A}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial\mathfrak{C}}+\mathfrak{B}\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial\mathfrak{C}}+\mathfrak{C}\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial\mathfrak{C}}\right)\mathfrak{B}\\
&+\left(2\varphi_{33}+\mathfrak{A}\frac{\partial\varphi_{31}}{\partial\mathfrak{C}}+\mathfrak{B}\frac{\partial\varphi_{32}}{\partial\mathfrak{C}}+\mathfrak{C}\frac{\partial\varphi_{33}}{\partial\mathfrak{C}}\right)\mathfrak{C}=0.
\end{aligned}\right.$$

Posons

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}
\psi_{1q}&=\left(2\varphi_{1q}+\mathfrak{A}\frac{\partial\varphi_{q1}}{\partial\mathfrak{A}}+\mathfrak{B}\frac{\partial\varphi_{q2}}{\partial\mathfrak{A}}+\mathfrak{C}\frac{\partial\varphi_{q3}}{\partial\mathfrak{A}}\right),\\
\psi_{2q}&=\left(2\varphi_{2q}+\mathfrak{A}\frac{\partial\varphi_{q1}}{\partial\mathfrak{B}}+\mathfrak{B}\frac{\partial\varphi_{q2}}{\partial\mathfrak{B}}+\mathfrak{C}\frac{\partial\varphi_{q3}}{\partial\mathfrak{B}}\right),\\
\psi_{3q}&=\left(2\varphi_{3q}+\mathfrak{A}\frac{\partial\varphi_{q1}}{\partial\mathfrak{C}}+\mathfrak{B}\frac{\partial\varphi_{q2}}{\partial\mathfrak{C}}+\mathfrak{C}\frac{\partial\varphi_{q3}}{\partial\mathfrak{C}}\right)\quad(q=1,2,3).
\end{aligned}\right.$$

$$(8)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{21} & \psi_{31} \\ \psi_{12} & \psi_{22} & \psi_{32} \\ \psi_{13} & \psi_{23} & \psi_{33} \end{vmatrix},$$

$$(9)\qquad \begin{cases} \delta_{11} = \psi_{22}\psi_{33} - \psi_{23}\psi_{32}, \\ \delta_{12} = \psi_{23}\psi_{31} - \psi_{21}\psi_{33}, \\ \delta_{13} = \psi_{21}\psi_{32} - \psi_{22}\psi_{31}; \\ \delta_{21} = \psi_{32}\psi_{13} - \psi_{33}\psi_{12}, \\ \delta_{22} = \psi_{33}\psi_{11} - \psi_{31}\psi_{13}, \\ \delta_{23} = \psi_{31}\psi_{12} - \psi_{32}\psi_{11}; \\ \delta_{31} = \psi_{12}\psi_{23} - \psi_{13}\psi_{22}, \\ \delta_{32} = \psi_{13}\psi_{21} - \psi_{11}\psi_{23}, \\ \delta_{33} = \psi_{11}\psi_{22} - \psi_{12}\psi_{21}, \end{cases}$$

et les égalités (6) deviendront

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = -\dfrac{h}{\Delta}\left(\delta_{11}\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} + \delta_{12}\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} + \delta_{13}\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta}\right), \\ \mathfrak{B} = -\dfrac{h}{\Delta}\left(\delta_{21}\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} + \delta_{22}\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} + \delta_{23}\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta}\right), \\ \mathfrak{C} = -\dfrac{h}{\Delta}\left(\delta_{31}\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} + \delta_{32}\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} + \delta_{33}\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta}\right) \quad (\text{avec } \delta_{pq} = \delta_{pq}). \end{cases}$$

Cette nouvelle forme des conditions d'équilibre nous montre que, dans les corps cristallisés, la direction de l'aimantation en un point ne coïncide plus, comme dans les corps isotropes, avec la grandeur géométrique dont les composantes sont $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta}$.

## § III. — Détermination de la distribution qui convient à l'équilibre.

3. Supposons que l'expérience ait fait connaître pour un corps déterminé, de structure homogène ou continûment variable, la surface d'induction magnétique représentée par l'égalité (3).

Les équations (8) et (9) feront alors connaître $\Delta$ et les $\delta_{pq}$ en fonction de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Les équations (10) deviendront des relations entre $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$

et $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}$, $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}$; on pourra les supposer résolues en $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et écrire

$$(11)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = \theta_1\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}, \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}, \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}\right), \\ \mathfrak{B} = \theta_2\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}, \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}, \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}\right), \\ \mathfrak{C} = \theta_3\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}, \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}, \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}\right). \end{cases}$$

On voit alors que, moyennant ces équations, la détermination de la distribution qui convient à l'équilibre se ramène à la détermination de la fonction $\mathcal{V}$. Voyons comment cette dernière est déterminée.

Si, dans les expressions de $\Delta$ et des $\delta_{pq}$, nous remplaçons $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ par leurs expressions (11), $\Delta$ et les $\delta_{pq}$ deviendront des fonctions de $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}$, $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}$, et nous pourrons poser en général

$$(12)\qquad -h\frac{\delta_{pq}}{\Delta} = D_{pq}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}, \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}, \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}\right).$$

Les équations (10) deviendront alors

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = D_{11}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi} + D_{12}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta} + D_{13}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}, \\ \mathfrak{B} = D_{21}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi} + D_{22}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta} + D_{23}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}, \\ \mathfrak{C} = D_{31}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi} + D_{32}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta} + D_{33}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta} \end{cases}$$

avec

$$D_{pq} = D_{qp}.$$

Nous allons imposer à ces égalités une nouvelle transformation. Soient, au point considéré,

$a$, $a'$, $a''$ les cosinus des angles de $Ox$ avec $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$;
$b$, $b'$, $b''$ les cosinus des angles de $Oy$ avec $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$;
$c$, $c'$, $c''$ les cosinus des angles de $Oz$ avec $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$.

Nous aurons

$$(14)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = a\mathcal{A} + b\mathcal{B} + c\mathcal{C}, \\ \mathfrak{B} = a'\mathcal{A} + b'\mathcal{B} + c'\mathcal{C}, \\ \mathfrak{C} = a''\mathcal{A} + b''\mathcal{B} + c''\mathcal{C} \end{cases}$$

et

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi} = a\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + b\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + c\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial z},\\ \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta} = a'\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + b'\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + c'\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial z},\\ \dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta} = a''\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + b''\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + c''\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}.\end{cases}$$

Les égalités (15) nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} &D_{pq}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}, \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}, \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}, \alpha, \beta, \ldots\right)\\ &\qquad = d_{pq}\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}, \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}, \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}; \alpha, \beta, \ldots; a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''\right),\end{aligned}$$

et les égalités (13) deviennent

$$\begin{aligned} a\mathcal{A} + b\mathcal{B} + c\mathcal{C} &= (ad_{11} + a'd_{12} + a''d_{13})\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + (bd_{11} + b'd_{12} + b''d_{13})\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\\ &\quad + (cd_{11} + c'd_{12} + c''d_{13})\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z},\\ a'\mathcal{A} + b'\mathcal{B} + c'\mathcal{C} &= (ad_{21} + a'd_{22} + a''d_{23})\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + (bd_{21} + b'd_{22} + b''d_{23})\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\\ &\quad + (cd_{21} + c'd_{22} + c''d_{23})\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z},\\ a''\mathcal{A} + b''\mathcal{B} + c''\mathcal{C} &= (ad_{31} + a'd_{32} + a''d_{33})\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + (bd_{31} + b'd_{32} + b''d_{33})\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\\ &\quad + (cd_{31} + c'd_{32} + c''d_{33})\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z},\end{aligned}$$

ou bien, en désignant par $\omega_{pq}$ des fonctions de $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}$, $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}$, $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}$, $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, faciles à former en fonction des $d_{pq}$,

$$(16)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = \omega_{11}\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + \omega_{12}\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + \omega_{13}\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial z},\\ \mathcal{B} = \omega_{21}\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + \omega_{22}\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + \omega_{23}\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial z},\\ \mathcal{C} = \omega_{31}\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + \omega_{32}\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + \omega_{33}\dfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\end{cases}$$

avec

$$\omega_{pq} = \omega_{qp}.$$

Différentions les deux membres de la première équation (16) par rapport à $x$, les deux membres de la deuxième équation (16) par rapport à $y$, les deux membres de la troisième équation (16) par rapport à $z$ et ajou-

tons, membre à membre, les résultats obtenus, en remarquant que

$$\Delta \mathcal{V} = -4\pi\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}\right);$$

nous aurons

$$(17)\quad \frac{\Delta \mathcal{V}}{4\pi} - \left\{ \begin{aligned} & \left[\omega_{11} + \frac{\partial \omega_{11}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{12}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_{13}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right]\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x^2} \\ & + \left[\omega_{22} + \frac{\partial \omega_{21}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{22}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_{23}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right]\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial y^2} \\ & + \left[\omega_{33} + \frac{\partial \omega_{31}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{32}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial \omega_{33}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right]\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial z^2} \\ & + \left(\omega_{23} + \omega_{32} + \left[\frac{\partial \omega_{21}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)} + \frac{\partial \omega_{31}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)}\right]\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \left[\frac{\partial \omega_{22}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)} + \frac{\partial \omega_{32}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)}\right]\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \left[\frac{\partial \omega_{23}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)} + \frac{\partial \omega_{33}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)}\right]\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial y\,\partial z} \\ & + \left(\omega_{31} + \omega_{13} + \left[\frac{\partial \omega_{31}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)} + \frac{\partial \omega_{11}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)}\right]\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \left[\frac{\partial \omega_{32}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)} + \frac{\partial \omega_{12}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)}\right]\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \left[\frac{\partial \omega_{33}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)} + \frac{\partial \omega_{13}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)}\right]\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial z\,\partial x} \\ & + \left(\omega_{12} + \omega_{21} + \left[\frac{\partial \omega_{11}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)} + \frac{\partial \omega_{21}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)}\right]\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \left[\frac{\partial \omega_{12}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)} + \frac{\partial \omega_{22}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)}\right]\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \left[\frac{\partial \omega_{13}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)} + \frac{\partial \omega_{23}}{\partial\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)}\right]\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x\,\partial y} \\ & + \left(\frac{\partial \omega_{11}}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{11}}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{11}}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{11}}{\partial a'}\frac{\partial a'}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{11}}{\partial b'}\frac{\partial b'}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{11}}{\partial c'}\frac{\partial c'}{\partial x}\right. \\ & \qquad \left. + \frac{\partial \omega_{11}}{\partial a''}\frac{\partial a''}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{11}}{\partial b''}\frac{\partial b''}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{11}}{\partial c''}\frac{\partial c''}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{11}}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{11}}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \cdots\right)\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \right\} = 0,$$

les points remplaçant des termes analogues au dernier écrit, termes qui, comme le dernier écrit, disparaissent si le cristal considéré est homogène.

L'équation (17) représente l'équation différentielle que la fonction $\mathcal{V}$ doit vérifier en tous les points d'un cristal soumis à l'aimantation par influence.

A la limite du cristal et du milieu extérieur, on doit avoir

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e} = -4\pi[\mathcal{A}\cos(N_i, x) + \mathcal{B}\cos(N_i, y) + \mathcal{C}\cos(N_i, z)],$$

ou bien, en vertu des équations (16),

$$(18)\quad \begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_i} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N_e}\right) &+ [\omega_{11}\cos(N_i, x) + \omega_{12}\cos(N_i, y) + \omega_{13}\cos(N_i, z)]\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_i} \\ &+ [\omega_{21}\cos(N_i, x) + \omega_{22}\cos(N_i, y) + \omega_{23}\cos(N_i, z)]\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_i} \\ &+ [\omega_{31}\cos(N_i, x) + \omega_{32}\cos(N_i, y) + \omega_{33}\cos(N_i, z)]\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_i} = 0. \end{aligned}$$

Ces équations (17) et (18), jointes à d'autres équations qui sont les mêmes que pour les corps isotropes (*voir* Chapitre II), déterminent la fonction $\mathcal{V}$ et partant la distribution qui convient à l'équilibre.

## § IV. — Détermination de la surface d'induction magnétique d'un cristal.

1. Admettons que les quantités $\varphi_{pq}$ soient indépendantes de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Les quantités $\omega_{pq}$, que nous désignerons alors par $\Delta_{pq}$, seront indépendantes de $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}$. Les équations (16) continueront à être exactes, ainsi que l'équation (18); mais l'équation (17) se simplifiera notablement. Si le cristal est homogène, elle deviendra simplement

$$(19)\quad \begin{aligned} \left(\frac{1}{4\pi} - \Delta_{11}\right)\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x^2} &+ \left(\frac{1}{4\pi} - \Delta_{22}\right)\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{4\pi} - \Delta_{33}\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial z^2}\right) \\ &- 2\Delta_{23}\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial y\,\partial z} - 2\Delta_{31}\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial z\,\partial x} - 2\Delta_{12}\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x\,\partial y} = 0. \end{aligned}$$

On est alors amené aux équations données par Poisson pour résoudre le problème de l'aimantation des cristaux.

En se plaçant dans les conditions admises par la théorie de Poisson, on possède des méthodes expérimentales qui permettent de déterminer la sur-

face

$$(20)\qquad \Delta_{11}x^2+\Delta_{22}y^2+\Delta_{33}z^2+2\Delta_{23}yz+2\Delta_{31}zx+2\Delta_{12}xy=-\frac{1}{h},$$

surface qui, dans cette théorie de Poisson, remplace la surface variable donnée par l'égalité (3).

Or nous allons voir qu'il en résulte une méthode pour déterminer la surface

$$\omega_{11}x^2+\omega_{22}y^2+\omega_{33}z^2+2\omega_{23}yz+2\omega_{31}zx+2\omega_{12}xy=-\frac{1}{h},$$

surface identique à la surface (3), mais où l'on a pris pour axes de coordonnées $Ox$, $Oy$, $Oz$ au lieu de $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, et pour paramètres variables $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}$, $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}$, $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}$ en place de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

Supposons un corps cristallin de forme telle et tellement placé dans un champ magnétique que, d'après la théorie de Poisson, il s'aimante uniformément dans ce champ, quelles que soient la grandeur et la forme de sa surface d'aimantation (20). C'est ce qui arrive, notamment, si le cristal a la forme d'une sphère et si le champ magnétique est uniforme. On aura alors, quels que soient les $\Delta_{pq}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}&=f(\Delta_{11},\Delta_{22},\Delta_{33},\Delta_{23},\Delta_{31},\Delta_{12}),\\ \mathcal{B}&=g(\Delta_{11},\Delta_{22},\Delta_{33},\Delta_{23},\Delta_{31},\Delta_{12}),\\ \mathcal{C}&=h(\Delta_{11},\Delta_{22},\Delta_{33},\Delta_{23},\Delta_{31},\Delta_{12}).\end{aligned}$$

Remplaçons $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ par ces expressions dans la fonction $\omega_{pq}$ relative à une substance déterminée, après avoir exprimé cette fonction $\omega_{pq}$ elle-même non au moyen de $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}$, $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}$, $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}$, mais au moyen de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$; $\omega_{pq}$ deviendra

$$\mathfrak{D}_{pq}(\Delta_{11},\Delta_{22},\Delta_{33},\Delta_{23},\Delta_{31},\Delta_{12}),$$

$\mathfrak{D}_{pq}$ étant, pour une substance déterminée, une fonction d'une forme déterminée.

Choisissons les six constantes $\Delta_{11}$, $\Delta_{22}$, $\Delta_{33}$, $\Delta_{23}$, $\Delta_{31}$, $\Delta_{12}$, de manière

qu'elles vérifient les équations

$$\mathfrak{D}_{11}(\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}) = \Delta_{11},$$
$$\mathfrak{D}_{22}(\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}) = \Delta_{22},$$
$$\mathfrak{D}_{33}(\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}) = \Delta_{33},$$
$$\mathfrak{D}_{23}(\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}) = \Delta_{23},$$
$$\mathfrak{D}_{31}(\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}) = \Delta_{31},$$
$$\mathfrak{D}_{12}(\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}) = \Delta_{12}.$$

Soit $\Delta'_{11}$, $\Delta'_{22}$, $\Delta'_{33}$, $\Delta'_{23}$, $\Delta'_{31}$, $\Delta'_{12}$ une solution de ces équations. Si l'on remplace dans les équations différentielles du problème de Poisson les $\Delta_{pq}$ par les $\Delta'_{pq}$, l'intégration de ces équations fournira sur le cristal une aimantation uniforme correspondant à une certaine fonction potentielle $\mathcal{V}$.

*Cette fonction potentielle est aussi celle qui intègre nos équations générales, en supposant le cristal formé avec la substance que nous considérons.*

La démonstration de ce théorème est trop facile pour qu'il soit utile de la développer.

Le théorème précédent étant admis, on en déduit aisément la proposition que nous allons énoncer.

Dans un champ magnétique, on place un cristal qui, dans la théorie de Poisson, s'aimanterait uniformément, quelle que fût sa surface d'aimantation. Le cristal étant homogène, ses axes d'élasticité ont la même direction en tous ses points. Prenons-les pour axes de coordonnées. Si l'on admettait la théorie de Poisson, la fonction potentielle serait, en chaque point extérieur au cristal et aux aimants, donnée par la formule

$$(21) \qquad \mathcal{V} = F(x, y, z, \Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}).$$

La détermination expérimentale de la valeur de $\mathcal{V}$ aux divers points de l'espace permettrait alors de déterminer $\Delta_{11}$, $\Delta_{22}$, $\Delta_{33}$, $\Delta_{23}$, $\Delta_{31}$, $\Delta_{12}$.

Bien que la théorie de Poisson ne soit pas exacte, notre cristal va prendre une aimantation uniforme, dont les composantes seront $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, et $\mathcal{V}$ va vérifier l'équation (21); seulement les valeurs qu'il faudra donner dans cette équation aux quantités

$$\Delta_{11}, \Delta_{22}, \Delta_{33}, \Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}$$

seront

$$-h\varphi_{11}, \quad -h\varphi_{22}, \quad -h\varphi_{33}, \quad -h\varphi_{23}, \quad -h\varphi_{31}, \quad -h\varphi_{12},$$

en sorte que l'on aura ainsi déterminé la surface d'aimantation (3), qui convient à l'aimantation prise par le cristal dans ces circonstances.

Nous nous contenterons de ces quelques remarques sur l'aimantation des cristaux, laissant au lecteur le soin de généraliser les théories que nous avons exposées à propos des corps isotropes.

Le travail précédent n'aborde point, il s'en faut, tous les problèmes qui constituent l'étude de l'aimantation par influence dans les corps dénués de force coercitive. Nous nous sommes limités à un cas relativement très particulier.

En premier lieu, nous n'avons étudié que des corps magnétiques formés par des solides rigides. Quels phénomènes présentent, lorsqu'ils sont aimantés par influence, les fluides d'une part et les solides élastiques de l'autre? C'est un problème qui a sollicité, dans ces dernières années, les recherches de plusieurs physiciens illustres et que nous n'avons point abordé dans ce qui précède.

En second lieu, nous avons étudié les phénomènes que présentent des aimants qui portent des charges d'électricité statique; mais nous n'avons point considéré les effets qui se manifestent dans le système renfermant à la fois des courants électriques et des aimants, laissant ainsi de côté l'électromagnétisme, les phénomènes d'induction par les aimants et la théorie de la propagation de l'électricité dans les conducteurs aimantés.

Nous souhaitons de pouvoir plus tard, poussant plus loin nos recherches, aborder quelques-uns au moins de ces problèmes qui abondent en difficultés; mais nous espérons que le présent travail, quelque restreint qu'il soit, aura contribué à élucider quelques points obscurs ou douteux dans la théorie de l'aimantation par influence.

# NOTE.

## DE L'INFLUENCE DU MAGNÉTISME SUR LA CHALEUR DE COMBINAISON.

Au Chapitre VI du Mémoire précédent, nous avons cité un certain nombre de travaux, soit théoriques, soit expérimentaux, relatifs à l'influence que l'aimantation exerce sur la chaleur de combinaison d'une substance magnétique. Nous avons, dans ce Chapitre, omis de citer quelques travaux qui se rapportent à la même question, les uns parce qu'ils n'étaient point encore publiés au moment où fut rédigé notre Mémoire, les autres parce qu'ils n'étaient pas parvenus à notre connaissance.

Le premier travail relatif aux problèmes dont l'étude fait l'objet des Chapitres VI et VII est dû à M. Th. Gross. M. Th. Gross en communiqua les principaux résultats à la Société de Physique de Berlin dès le 13 avril 1885 (¹). Peu de temps après, il le publia *in extenso* dans les *Comptes rendus de l'Académie de Vienne* (²).

Dans ce travail, M. Th. Gross constate qu'il se produit des courants entre les parties différemment aimantées d'un même morceau de fer plongé dans un acide. M. Th. Gross explique ce fait par l'influence que l'aimantation du fer exerce sur la chaleur de combinaison du fer avec l'acide.

Cette manière de voir est entièrement conforme à celle que M. Paul Janet (³) a émise un peu plus tard sans avoir connaissance des travaux de M. Th. Gross; mais là s'arrête l'analogie entre le travail de M. Th. Gross et celui de M. Paul Janet. M. Th. Gross énonce cette proposition :

*La chaleur de combinaison entre le fer et un acide doit être regardée comme plus grande s'il existe entre eux une énergie potentielle magnétique que s'il n'en existe pas.*

Au contraire, M. Janet énonce cette loi que *la chaleur de combinaison du fer est plus grande hors du champ magnétique que dans ce champ.*

Le travail de M. Paul Janet avait été précédé de quelques mois par un travail de M. Nichols (⁴). Comme M. Paul Janet, M. Nichols admet en principe que *le travail*

(¹) Voir *Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin*, 13 avril 1885.

(²) Th. Gross, *Ueber eine neue Entstehungsweise galvanischer Ströme durch Magnetismus* (*Wiener Sitzungsberichte*, 2ᵉ Folge, Band XCII, p. 1373, décembre 1885).

(³) P. Janet, *De l'influence du magnetisme sur les phénomènes chimiques* (*Journal de Physique*, 2ᵉ série, t. VI, p. 286; 1887).

(⁴) Nichols, *On the chemical beaviour of iron in the magnetic field* (*Sillimann's Journal*, 3ᵉ série, t. XXXI; avril 1886).

*magnétique effectué dans la dissolution du fer est le même que si le fer était enlevé à l'infini;* comme M. Paul Janet, M. Nichols en conclut que la chaleur de combinaison du fer est plus grande hors du champ magnétique que dans ce champ.

M. Nichols a essayé de contrôler par l'expérience les conséquences de la théorie; mais ses expériences lui donnent pour le fer aimanté une chaleur de combinaison tantôt plus grande et tantôt plus petite que pour le fer non aimanté.

Dans un plus récent travail, M. Th. Gross (¹) a repris de nouveau l'étude de la question. Il s'est attaché à démontrer, par la discussion des expériences de M. Nichols, que les résultats n'en pouvaient être concluants. Puis, allant plus loin, il a été amené à contester cette proposition que M. Nichols avait prise comme point de départ de sa théorie : le travail magnétique effectué dans la dissolution du fer est le même que si le fer était enlevé à l'infini. « Je suis obligé, dit-il, de regarder ce principe comme inexact, car... la dissolution du fer correspond à une désaimantation et non à une création d'énergie magnétique. »

Ces discussions montrent combien l'étude théorique de l'influence que l'aimantation exerce sur la chaleur de combinaison était confuse et combien il était nécessaire de reprendre cette étude par des méthodes rigoureuses.

---

(¹) TH. GROSS, *Ueber die Verbindungswärme des magnetisirten Eisens* (*Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin*, 22 avril 1887).

REVUE DE PHYSIQUE.

# ÉTUDE HISTORIQUE

SUR LA

# THÉORIE DE L'AIMANTATION PAR INFLUENCE,

PAR M. P. DUHEM,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lille.

## I. — Formation des équations d'équilibre. — Travaux de Poisson.

1. S'il est une partie de la Physique théorique dont l'insuffisance soit souvent et vivement déplorée par l'expérimentateur et le praticien, c'est assurément l'étude de l'aimantation par influence. Au fur et à mesure que se répand l'usage des machines dynamo-électriques, les phénomènes qui dépendent de l'aimantation par influence jouent dans l'industrie un rôle de plus en plus important. Cependant la théorie est à peu près impuissante à aborder l'étude de l'induction magnétique. C'est seulement dans le cas particulier de pièces de fer doux immobiles en présence d'aimants permanents que, grâce aux travaux de Poisson, l'Analyse mathématique peut pénétrer un peu avant dans l'étude des phénomènes; encore les principes sur lesquels repose cette analyse donnent-ils prise, pour le géomètre comme pour le physicien, à bien des doutes et à bien des difficultés.

Nous nous proposons, dans le présent travail, d'étudier l'histoire des idées théoriques qui ont été émises sur ce difficile sujet; nous chercherons surtout à préciser les principes mêmes qui, dans chaque théorie, servent à établir les équations de l'équilibre magnétique, en glissant plus rapidement sur les cas particuliers dans lesquels on est parvenu à intégrer ces équations. L'exposé complet de la marche suivie dans l'étude de l'aimantation par influence ne se trouve dans aucun Traité classique.

Nous examinerons, en premier lieu, la voie suivie par Poisson pour établir la

théorie de l'aimantation du fer doux sous l'influence d'aimants permanents, les difficultés qui se rencontrent dans cette voie et les efforts par lesquels d'autres physiciens ont cherché à supprimer ces difficultés; en second lieu, nous indiquerons brièvement les conséquences qui ont été déduites de ces équations; enfin nous exposerons l'histoire des découvertes par lesquelles a été constituée la théorie de l'aimantation des cristaux.

2. « Avant les travaux de Coulomb sur le Magnétisme, dit Poisson (I, p. 250)[1], on supposait les deux fluides transportés dans l'acte de l'aimantation aux deux extrémités des aiguilles de boussole et accumulés à leurs pôles; tandis que, suivant cet illustre physicien, les fluides boréal et austral n'éprouvent que des déplacements infiniment petits et ne sortent pas de la molécule du corps aimanté à laquelle ils appartiennent. »

La notion d'*élément magnétique* ainsi introduite dans la Physique par Coulomb est la base sur laquelle repose la théorie donnée par Poisson de l'*induction magnétique du fer doux*. D'après Poisson, les fluides magnétiques se distribuent sur un morceau de fer doux soumis à des forces magnétiques déterminées suivant des lois semblables à celles qui régleraient la distribution, sous l'influence de forces électriques données, des fluides électriques sur un ensemble de corps conducteurs très petits, séparés les uns des autres par une substance isolante.

Voici, en effet, les hypothèses sur lesquelles Poisson fait reposer l'étude de l'induction magnétique :

« Considérons, dit-il (I, p. 262), un corps aimanté par influence, de forme et de dimensions quelconques, dans lequel la force *coercitive* soit nulle et que nous appellerons A, pour abréger.

» D'après ce qui précède, nous regarderons ce corps comme un assemblage d'*éléments magnétiques*, séparés les uns des autres par des intervalles inaccessibles au magnétisme, et voici, par rapport à ces éléments, les diverses suppositions résultant de la discussion dans laquelle nous venons d'entrer :

» 1° Les dimensions des éléments magnétiques, et celles des espaces qui les isolent, sont insensibles et pourront être traitées comme des infiniment petits relativement aux dimensions du corps A.

» 2° La matière de ce corps n'oppose aucun obstacle à la séparation des deux fluides *boréal* et *austral* dans l'intérieur des éléments magnétiques.

» 3° Les portions des deux fluides que l'aimantation sépare dans un élément quelconque sont toujours très petites relativement à la totalité du *fluide neutre* que cet élément renferme, et ce fluide neutre n'est jamais épuisé.

---

(1) Ce renvoi et les suivants se rapportent à l'Index bibliographique qui termine le présent travail.

» 4° Ces portions de fluide, ainsi séparées, se transportent à la surface de l'élément magnétique où elles forment une couche dont l'épaisseur, variable d'un point à un autre, est partout très petite et pourra aussi être considérée comme infiniment petite, même en la comparant aux dimensions de cet élément. »

Ces hypothèses conduisent Poisson à admettre, comme point de départ de la théorie de l'aimantation par influence, un principe entièrement semblable à celui qu'il avait pris comme point de départ de la théorie de la distribution électrique sur les corps conducteurs : *Le fluide magnétique doit se distribuer sur chaque élément, de telle façon que l'action exercée en un point de l'élément par le fluide décomposé que renferme cet élément contrebalance exactement l'action exercée au même point par tout le magnétisme extérieur à l'élément.* Toute la mise en équation du problème de l'induction magnétique consiste, une fois ce principe admis, à exprimer les deux actions dont il vient d'être question et à écrire qu'elles sont égales et directement opposées.

Avec Coulomb, Poisson admet que deux particules de fluide magnétique s'attirent ou se repoussent selon qu'elles sont de nom contraire ou de même nom; que l'action qu'elles exercent l'une sur l'autre est proportionnelle au produit des quantités de fluide qui forment ces deux particules et en raison inverse du carré de la distance qui les sépare. Cette loi conduit aux conséquences suivantes :

Soient A, B, C les composantes, suivant trois axes de coordonnées rectangulaires, du *moment magnétique* d'un élément magnétique. Soit $r$ la distance d'un point quelconque, pris à l'intérieur de cet élément, à un point M dont la distance à tous les points de l'élément est supposée très grande par rapport aux dimensions mêmes de l'élément; soient $x, y, z$ les coordonnées d'un point de l'élément; soient $\xi, \eta, \zeta$ les coordonnées du point M; soit enfin $h$ une constante positive. Si nous posons

$$V = A\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

les composantes de l'action exercée par l'élément considéré sur une quantité de fluide magnétique positif (fluide austral) placée au point M auront pour valeur

$$X = -h\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -h\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = -h\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Considérons un volume $v$ très petit, mais renfermant cependant un grand nombre d'éléments magnétiques. Posons pour ce petit volume

$$\mathcal{A} = \frac{1}{v}\Sigma A, \qquad \mathcal{B} = \frac{1}{v}\Sigma B, \qquad \mathcal{C} = \frac{1}{v}\Sigma C;$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ seront en général des fonctions continues des coordonnées $x, y, z$ du

point autour duquel le petit volume $v$ est supposé décrit, et elles sont indépendantes de la forme et de la grandeur de ce petit volume. Elles sont les composantes d'une grandeur géométrique dont la valeur

$$\mathfrak{M} = (\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2)^{\frac{1}{2}}$$

porte le nom d'*intensité de l'aimantation* au point $(x, y, z)$ et dont la direction porte le nom de *direction de l'aimantation* au même point.

Moyennant ces définitions, il nous devient facile d'exprimer l'action d'un système d'aimants en un point M dont la distance à tout point de ces aimants peut être regardée comme extrêmement grande par rapport aux dimensions d'un élément magnétique. Si l'on pose, en effet,

$$(1) \qquad \mathcal{V} = \int\int\int \left( \mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz,$$

l'intégrale triple s'étendant au volume occupé par tous les aimants que l'on considère, les composantes de l'action dont il s'agit auront pour valeur

$$X = -h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi}, \qquad Y = -h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta}, \qquad Z = -h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta}.$$

D'après cela, pour calculer l'action exercée en un point M, intérieur à un élément magnétique par tout le fluide magnétique répandu à l'extérieur de cet élément, Poisson partage l'espace en deux régions :

1° Un volume $v$, limité par une surface qui entoure l'élément de toutes parts et dont tous les points sont séparés de tous les points de l'élément par une distance très petite par rapport aux dimensions du corps, mais très grande par rapport aux dimensions d'un élément magnétique;

2° La partie de l'espace qui est extérieure à $v$.

Si l'on étend alors l'intégrale (1) à toute cette seconde région de l'espace et si l'on désigne par $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ les composantes de l'action exercée au point M par tout le fluide répandu à l'intérieur du volume $v$ en exceptant le fluide distribué sur l'élément auquel appartient le point M, l'action exercée au point M par tout le fluide extérieur à l'élément auquel appartient ce point aura pour composantes

$$X = -h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} + X_1,$$

$$Y = -h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} + Y_1,$$

$$Z = -h \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta} + Z_1.$$

Si $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont les composantes de l'action exercée au point M

magnétique répandu à la surface de l'élément dont ce point fait partie, les conditions de l'équilibre magnétique à l'intérieur de cet élément seront, d'après la manière de voir de Poisson,

$$(2)\quad \begin{cases} -h\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} + X_1 + \alpha = 0, \\ -h\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} + Y_1 + \beta = 0, \\ -h\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta} + Z_1 + \gamma = 0. \end{cases}$$

3. Jusqu'à présent la théorie de Poisson, tout en invoquant un certain nombre d'hypothèses, ne donne lieu à aucun reproche, car ces hypothèses sont toutes énoncées avec précision et les égalités proposées en sont des conséquences rigoureuses; mais, dans les transformations que Poisson fait ensuite subir aux équations (2), plusieurs difficultés graves vont se présenter sur lesquelles il est nécessaire d'appeler l'attention.

Poisson commence par établir que *les trois composantes désignées* par $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ *sont égales à* o *pourvu seulement que le volume* v *admette un centre et que le point* M *soit ce centre*. Reproduisons intégralement ici le raisonnement par lequel il croit pouvoir établir cette proposition :

« Menons, dit-il (t. I, p. 272), par le point M une droite CMC′ dont les deux parties soient égales entre elles et d'une grandeur telle qu'on puisse les considérer à la fois comme infiniment petites, en les comparant aux dimensions de A, et comme infinies relativement aux dimensions des éléments magnétiques et des espaces qui les séparent les uns des autres. La proposition dont nous avons besoin consiste en ce que, si les deux extrémités C et C′ de cette droite sont toutes les deux hors d'un élément magnétique, la somme des particules de fluide libre devra être considérée comme égale sur ses deux parties MC et MC′, en n'y comprenant pas le fluide libre appartenant à l'élément magnétique dont le point M fait partie.

» En effet, tous les éléments traversés par la droite CMC′ seront sensiblement dans le même état magnétique, puisque la longueur de cette droite est insensible, eu égard aux dimensions de A; de plus, abstraction faite de l'élément dont le point M fait partie, la droite CM en allant de C vers M, et la droite MC′ en allant de M vers C′, rencontreront, en général, un même nombre de fois les surfaces des éléments magnétiques en pénétrant dans leur intérieur; elles rencontreront aussi ces surfaces le même nombre de fois en sortant des éléments. A la vérité, ces points de rencontre ne sont point semblablement situés sur toutes les surfaces; mais leur nombre étant très grand, et comme infini, les mêmes circonstances devront toutes se présenter des deux côtés du point M, et alors il n'y aura pas de raison de supposer la quantité de fluide libre plus grande d'un côté que de l'autre.

» Cela posé, appelons, pour abréger, $v$ la petite portion de A dont nous voulons déterminer l'action sur le point M, et, pour cette détermination, décomposons $v$ en une infinité de cônes infiniment aigus dont les sommets soient en ce point M. Comme l'autre partie de A, ... se compose d'éléments magnétiques qui sont tous complets, il sera nécessaire que $v$ se compose de même d'éléments entiers; d'où il résulte que l'axe de chacun de ces cônes devra se terminer hors d'un élément magnétique.

» Soit $\omega$ l'aire infiniment petite de la section faite dans l'un de ces cônes, perpendiculairement à son axe et à l'unité de distance du sommet M; désignons par $r$ la distance d'un point quelconque de cet axe au point M; l'élément de volume du cône, à cette distance $r$, sera $r^2\omega\, dr$; et si l'on appelle $\mu$ la quantité de fluide libre qui répond au même point, l'action de cet élément sur le sommet, dirigée suivant l'axe du cône, sera exprimée par $\mu\omega\, dr$. L'action du cône entier aura la même direction, et pour valeur $\omega \int \mu\, dr$, l'intégrale étant prise dans toute la longueur de son axe et exprimant évidemment la quantité de fluide libre qui se trouve sur cette droite. L'action du cône dont le prolongement est celui-ci sera dirigée en sens contraire; ces deux forces opposées se détruiront en partie, et si l'on suppose, ce qui est permis, ces deux cônes d'égale longueur et de même ouverture $\omega$, ces deux forces se réduiront, en vertu de la proposition précédente, à la seule action du fluide libre appartenant à la fois à l'un des cônes et à l'élément magnétique dont le point M fait partie. Il en sera de même à l'égard de tous les cônes considérés deux à deux, en sorte que l'action totale de $v$ sur le point M sera réduite à celle de la couche magnétique qui occupe la surface même de cet élément. On voit aussi par ce raisonnement que, si le point M était situé hors d'un élément magnétique, l'action de $v$ sur ce point se détruirait complètement, c'est-à-dire qu'une particule de fluide boréal ou austral qu'on y placerait y demeurerait en équilibre, si elle n'était soumise qu'à cette seule action. »

Il nous semble utile d'insister sur l'insuffisance du raisonnement que nous venons de rapporter. Il nous suffira d'ailleurs, pour faire ressortir cette insuffisance, de montrer l'inexactitude de l'une des conséquences auxquelles il conduit; c'est Poisson lui-même qui nous fournira cette conséquence :

« Ces conclusions, dit-il (t. I, p. 274), sont indépendantes de la forme de $v$; elles exigent seulement que cette portion de A ne contienne que des éléments magnétiques complets, et que les rayons menés du point M à sa surface soient tous très grands par rapport aux dimensions des éléments et néanmoins insensibles relativement aux dimensions de A; et, en effet, pourvu que ces conditions soient toujours remplies, on pourra augmenter ou diminuer $v$ sans altérer sensiblement son action sur le point M; l'action des éléments entiers que l'on ajoutera ou que l'on retranchera de cette manière se calculera par la méthode du n° 1;

mais, vu la petite étendue dans laquelle ces éléments seront circonscrits, les intégrales triples qui s'y rapporteront pourront être négligées par rapport aux forces auxquelles doivent être ajoutées les composantes de l'action de $v$. »

Cette conséquence, avons-nous dit, est erronée. Nous croyons utile d'en montrer l'inexactitude, parce que cette même inexactitude se retrouve dans plusieurs des raisonnements de Poisson et constitue l'un des graves défauts analytiques que l'on peut reprocher à la théorie de l'illustre physicien.

Considérons un premier volume, tel que $v$, limité par une surface $s$ ayant pour centre le point M; supposons qu'une autre surface $s'$, ayant aussi pour centre le point M, limite un second volume $v'$ renfermant $v$ à son intérieur. D'après Poisson, l'action qu'exerce au point M l'ensemble formé par tous les éléments magnétiques du volume $v$, à l'exception de l'élément auquel appartient le point M, est égale à o. Il en est de même de l'action exercée au point M par l'ensemble que forment tous les éléments magnétiques du volume $s'$, sauf l'élément auquel appartient le point M. Par conséquent, d'après Poisson, l'ensemble des éléments situés entre les deux surfaces $s$ et $s'$ n'exerce au point M aucune action. Or, tous ces éléments sont à une distance du point M très considérable par rapport à leurs dimensions. Si donc on pose

$$\mathcal{V} = \int\int\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

l'intégrale triple s'étendant au volume compris entre les surfaces $s$ et $s'$, l'action exercée au point M par le fluide magnétique compris entre ces deux surfaces aura pour composantes

$$X = -h\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}, \qquad Y = -h\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\eta}, \qquad Z = -h\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\zeta}.$$

Calculons l'une d'entre elles, la première par exemple.

Les égalités

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial\xi} = -\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial\xi} = -\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y},$$

$$\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial\xi} = -\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}$$

permettent d'écrire

$$X = h\int\int\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} + \mathcal{B}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

Une intégration par parties permet alors de transformer cette égalité. Soit R le rayon vecteur d'un point de la surface $s$, ce rayon vecteur étant compté à partir du point M ; soit, au même point, N la normale à la surface $s$, dirigée vers l'extérieur de la surface $s$ ; soient, de même, R' le rayon vecteur d'un point de la surface $s'$ et N' la normale en ce point dirigée vers l'extérieur de la surface $s'$. On aura

$$\begin{aligned} X = &- h \mathop{\mathbf{S}} [\mathcal{A}' \cos(N', x) + \mathcal{B}' \cos(N', y) + \mathcal{C}' \cos(N', z)] \frac{\cos(R', x)}{R'^2} ds' \\ &+ h \mathop{\mathbf{S}} [\mathcal{A} \cos(N, x) + \mathcal{B} \cos(N, y) + \mathcal{C} \cos(N, z)] \frac{\cos(R, x)}{R^2} ds \\ &- h \iiint \left( \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dx\, dy\, dz. \end{aligned}$$

Si l'on désigne par $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{C}_0$ les valeurs de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, au point M, et par $\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r}\right)$ la valeur que prend la dérivée de $\mathcal{A}$ suivant la direction du rayon vecteur R en un certain point de ce rayon vecteur dont la distance au point M est inférieure à R ; par $\left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r}\right)$, $\left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r}\right)$ des quantités analogues à $\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r}\right)$, on aura, au point où le rayon R rencontre la surface $s$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_0 + R \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r}\right), \\ \mathcal{B} &= \mathcal{B}_0 + R \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r}\right), \\ \mathcal{C} &= \mathcal{C}_0 + R \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r}\right), \end{aligned}$$

et semblablement au point où le rayon vecteur R' rencontre la surface $s'$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= \mathcal{A}_0 + R' \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r}\right)', \\ \mathcal{B}' &= \mathcal{B}_0 + R' \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r}\right)', \\ \mathcal{C}' &= \mathcal{C}_0 + R' \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r}\right)'. \end{aligned}$$

L'expression précédemment obtenue pour X peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} X = &- h \mathop{\mathbf{S}} [\mathcal{A}_0 \cos(N', x) + \mathcal{B}_0 \cos(N', y) + \mathcal{C}_0 \cos(N', z)] \frac{\cos(R', x)}{R'^2} ds' \\ &+ h \mathop{\mathbf{S}} [\mathcal{A}_0 \cos(N, x) + \mathcal{B}_0 \cos(N, y) + \mathcal{C}_0 \cos(N, z)] \frac{\cos(R, x)}{R^2} ds \\ &- h \mathop{\mathbf{S}} \left[ \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r}\right)' \cos(N', x) + \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r}\right)' \cos(N', y) + \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r}\right)' \cos(N', z) \right] \frac{\cos(R', x)}{R'} ds' \\ &+ h \mathop{\mathbf{S}} \left[ \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial r}\right) \cos(N, x) + \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial r}\right) \cos(N, y) + \left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r}\right) \cos(N, z) \right] \frac{\cos(R, x)}{R} ds \\ &- h \frac{\partial}{\partial \xi} \iiint \left( \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z} \right) \frac{1}{r} dx\, dy\, dz. \end{aligned}$$

Le dernier terme est, à un facteur constant près, la composante suivant l'axe des $x$ de l'action exercée au point M par une masse soumise aux conditions suivantes :

Cette masse agit conformément à la loi de Newton.

Elle est comprise entre les surfaces $s$ et $s'$.

Elle a pour densité en chaque point $\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}\right)$.

Or on sait qu'une telle action est une quantité très petite du même ordre que R et R' si R et R' sont très petits.

Il est facile de voir également que le troisième et le quatrième terme du second membre sont des quantités très petites de l'ordre de R et de R'. Si donc, comme le fait Poisson, on néglige les quantités de cet ordre, on aura

$$\begin{aligned} X = &- h\mathcal{A}_0 \left[ \mathrm{S} \frac{\cos(N', x)\cos(R', x)}{R'^2} ds' - \mathrm{S} \frac{\cos(N, x)\cos(R, x)}{R^2} ds \right] \\ &- h\mathcal{B}_0 \left[ \mathrm{S} \frac{\cos(N', y)\cos(R', x)}{R'^2} ds' - \mathrm{S} \frac{\cos(N, y)\cos(R, x)}{R^2} ds \right] \\ &- h\mathcal{C}_0 \left[ \mathrm{S} \frac{\cos(N', z)\cos(R', x)}{R'^2} ds' - \mathrm{S} \frac{\cos(N, z)\cos(R, x)}{R^2} ds \right]. \end{aligned}$$

Si les deux surfaces $s$ et $s'$ sont homothétiques et ont le point M pour centre d'homothétie, le second membre sera identiquement nul ; mais, si cette condition n'est pas réalisée, les coefficients de $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{C}_0$ seront en général des quantités finies, indépendantes de la grandeur des deux surfaces $s$ et $s'$ et dépendant seulement de leur forme et de leur orientation. On peut aisément démontrer de la manière suivante que ces quantités ne sont pas identiquement nulle pour des surfaces de forme différente. Imaginons, par exemple, que les surfaces $s$ et $s'$ soient deux cylindres droits, ayant leurs génératrices parallèles à $Ox$ et pour centre le point O. Si l'on désigne par $\omega$ et $\omega'$ les angles solides sous lesquels du point O on voit les bases de ces deux cylindres, on aura

$$\mathrm{S} \frac{\cos(N', x)\cos(R', x)}{R'^2} ds' - \mathrm{S} \frac{\cos(N, x)\cos(R, x)}{R^2} ds' = 2(\omega' - \omega).$$

Si les deux cylindres ne sont pas homothétiques, cette quantité ne sera pas égale à o, et X ne pourra être indépendant de $\mathcal{A}_0$, ni, partant, identiquement nul. La proposition énoncée par Poisson est donc manifestement inexacte.

4. Cette proposition joue cependant un rôle si capital dans la théorie de Poisson qu'il serait impossible de poursuivre l'exposé de cette théorie si l'on admettait pour un instant l'exactitude de la proposition en question. Nous admettrons donc que l'on ait

$$X_1 = 0, \qquad Y_1 = 0, \qquad Z_1 = 0;$$

les équations (2) deviendront alors

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} -h\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} + \alpha &= 0,\\ -h\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} + \beta &= 0,\\ -h\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta} + \gamma &= 0. \end{aligned}\right.$$

Voyons maintenant comment Poisson évalue $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Chacune des trois quantités $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta}$ est, à l'intérieur de l'élément magnétique auquel appartient le point M, une fonction continue des coordonnées $\xi, \eta, \zeta$ de ce point; lors donc que le point M se déplace à l'intérieur de l'élément magnétique dont il fait partie, ces trois quantités ne subissent qu'une variation de l'ordre de grandeur de l'élément; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, qui sont des quantités finies, ne varient donc d'un point à l'autre d'un élément magnétique que de quantités infiniment petites par rapport à leur propre valeur. En d'autres termes, le fluide magnétique doit se distribuer à l'intérieur de l'élément et à sa surface de telle façon que l'action exercée par ce fluide ait la même grandeur et la même direction en tous les points intérieurs à l'élément. Si l'on connaît la forme de l'élément magnétique, cette condition détermine la distribution qu'affecte le fluide magnétique en cet élément.

Poisson suppose que, pour les corps isotropes, l'élément magnétique a la forme d'une sphère; dans ce cas, il est aisé de trouver la distribution que doit affecter le fluide magnétique. Faisons glisser parallèlement à elle-même la surface qui limite l'élément magnétique de telle façon que son centre décrive un chemin infiniment petit dirigé comme la force constante que l'on veut obtenir et proportionnel à cette force. Entre l'ancienne et la nouvelle position de cette surface se trouvent deux espaces vides, l'un intérieur à l'élément magnétique, l'autre extérieur à cet élément. Imaginons que le fluide boréal remplisse uniformément un de ces espaces et que le fluide austral remplisse l'autre avec la même densité. Nous obtiendrons ainsi la distribution magnétique cherchée.

Dans ces conditions, si nous désignons par $u$ le volume de l'élément magnétique et par $Au$, $Bu$, $Cu$ les composantes suivant les axes coordonnés du moment magnétique de cet élément, les composantes de l'action exercée en un point intérieur à l'élément par le fluide magnétique distribué sur cet élément auront pour valeur

$$\alpha = -\frac{4}{3}\pi h A, \qquad \beta = -\frac{4}{3}\pi h B, \qquad \gamma = -\frac{4}{3}\pi h C.$$

Considérons un volume $v$ très petit par rapport au volume du corps aimanté,

mais très grand par rapport au volume $u$ des éléments magnétiques; soit $kv$ la fraction de ce volume occupée par les éléments magnétiques; soient $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{C}_0$ les composantes de l'aimantation au point $M(\xi, \eta, \zeta)$, intérieur à l'un des éléments de ce volume $v$; nous aurons sensiblement

$$\mathcal{A}_0 = k\mathrm{A}, \qquad \mathcal{B}_0 = k\mathrm{B}, \qquad \mathcal{C}_0 = k\mathrm{C},$$

et par conséquent

$$\alpha = -\frac{4\pi h}{3k}\mathcal{A}_0, \qquad \beta = -\frac{4\pi h}{3k}\mathcal{B}_0, \qquad \gamma = -\frac{4\pi h}{3k}\mathcal{C}_0,$$

ce qui donne aux égalités (3) la forme

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} + \frac{4\pi}{3k}\mathcal{A}_0 = 0,\\ &\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} + \frac{4\pi}{3k}\mathcal{B}_0 = 0,\\ &\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta} + \frac{4\pi}{3k}\mathcal{C}_0 = 0. \end{aligned}\right.$$

Telle est la forme que prennent les équations (3) lorsqu'on suppose que les éléments magnétiques ont la forme sphérique.

5. A ces équations (4), Poisson fait subir une dernière transformation dans laquelle nous allons rencontrer une nouvelle inexactitude.

Désignons par $\mathfrak{V}$ l'intégrale

$$\int\int\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz,$$

étendue à tous les corps du système autres que A, et par $\mathfrak{L}$ la même intégrale étendue à toute la partie du corps A située en dehors du volume $v$. Nous aurons

$$\mathcal{V} = \mathfrak{V} + \mathfrak{L},$$

et les équations (4) deviendront

$$(4\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \xi} + \frac{4\pi}{3k}\mathcal{A}_0 = 0,\\ &\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} + \frac{4\pi}{3k}\mathcal{B}_0 = 0,\\ &\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \zeta} + \frac{4\pi}{3k}\mathcal{C}_0 = 0. \end{aligned}\right.$$

Désignons par $\mathfrak{W}$ l'intégrale

$$\int\int\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

étendue au corps A tout entier, *y compris le volume v*. D'un raisonnement où se retrouvent des inexactitudes analogues à celles que nous avons signalées au n° 3, Poisson (I, p. 296-298) croit pouvoir déduire les égalités suivantes :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi} &= \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \xi} - \frac{4\pi}{3}\mathcal{A}_0, \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} &= \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \eta} - \frac{4\pi}{3}\mathcal{B}_0, \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta} &= \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \zeta} - \frac{4\pi}{3}\mathcal{C}_0. \end{aligned}\right.$$

Si de telles expressions étaient inexactes, comme rien dans le second membre de chacune d'elles ne dépend de la forme du volume $v$, les trois quantités $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta}$ seraient indépendantes de la forme de ce volume, ce que du reste Poisson énonce expressément (I, p. 298); et ce n'est pas là une simple inadvertance de sa part, ainsi que le suppose M. E. Mathieu (LXI, p. 156), mais une conséquence du raisonnement erroné que nous avons rapporté au n° 3.

D'ailleurs, on peut montrer directement l'inexactitude des égalités (5) en obtenant les expressions exactes qui leur doivent être substituées. Cette démonstration, pour être rigoureuse, suppose que l'on se soit assuré au préalable de l'existence de la fonction $\mathcal{V}$, ce que l'on peut faire de la manière suivante :

Entourons le point $M(\xi, \eta, \zeta)$ d'une surface fermée $\varpi$ et démontrons que l'intégrale

$$\int\int\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathcal{B}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

étendue à toute la partie du corps A extérieure à la surface $\varpi$, tend, lorsque cette surface $\varpi$ se contracte d'une manière quelconque jusqu'à venir s'évanouir au point M, vers une limite indépendante de la série de formes par laquelle passe la surface $\varpi$. Cette limite sera alors la fonction $\mathcal{V}$.

L'intégrale précédente étendue à l'espace compris entre la surface $\varpi$ et la surface $\Sigma$ du corps A peut se transformer au moyen d'une intégration par parties. N désignant la normale vers l'extérieur de la surface $\Sigma$ et $n$ la normale vers l'extérieur de la surface $\varpi$, elle devient

$$\begin{aligned} &\mathrm{S}\frac{1}{r}\left[\mathcal{A}\cos(N,x) + \mathcal{B}\cos(N,y) + \mathcal{C}\cos(N,z)\right]d\Sigma \\ -&\mathrm{S}\frac{1}{r}\left[\mathcal{A}\cos(n,x) + \mathcal{B}\cos(n,y) + \mathcal{C}\cos(n,y)\right]d\varpi \\ -&\int\int\int\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + [illegible]\right)[illegible]\,dz. \end{aligned}$$

La première intégrale est indépendante de la surface $\sigma$; la deuxième tend vers 0 lorsque la surface $\sigma$ se contracte; la troisième tend vers une limite indépendante des formes par lesquelles passe la surface $\sigma$ en se contractant, ainsi qu'il résulte de la théorie de la fonction potentielle.

L'existence de la fonction $\mathfrak{W}$ est ainsi démontrée, et de plus on voit que l'on a

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{W} &= \mathbf{S}\frac{1}{r}\left[\mathcal{A}\cos(N,x)+\mathcal{B}\cos(N,y)+\mathcal{C}\cos(N,z)\right]d\Sigma \\ &\quad -\iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz. \end{aligned} \right.$$

la dernière intégrale s'étendant au corps A tout entier.

La théorie de la fonction pontentielle nous enseigne en outre que, sous certaines conditions bien connues imposées à la quantité

$$\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\xi}+\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial\eta}+\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial\zeta},$$

la fonction $\mathfrak{W}$ est continue et admet par rapport aux coordonnées $\xi$, $\eta$, $\zeta$ du point M des dérivées partielles du premier ordre. L'une de ces dérivées, la dérivée par rapport à $\xi$ par exemple, a pour expression

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial\xi} &= \mathbf{S}\left[\mathcal{A}\cos(N,x)+\mathcal{B}\cos(N,y)+\mathcal{C}\cos(N,z)\right]\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\,d\Sigma \\ &\quad -\iiint\left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\,dx\,dy\,dz. \end{aligned} \right.$$

Comparons cette quantité à $\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}$, c'est-à-dire l'intégrale

$$\iiint\left(\mathcal{A}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial\xi}+\mathcal{B}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial\xi}+\mathcal{C}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial\xi}\right)dx\,dy\,dz.$$

étendue à tout l'espace compris entre la surface $\Sigma$ et la surface S qui limite le volume $v$. Il est facile de voir que l'on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi} = &\quad \mathbf{S}\left[\mathcal{A}\cos(N,x)+\mathcal{B}\cos(N,y)+\mathcal{C}\cos(N,z)\right]\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\,d\Sigma \\ &-\mathbf{S}\left[\mathcal{A}\cos(n,x)+\mathcal{B}\cos(n,y)+\mathcal{C}\cos(n,z)\right]\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\,dS \\ &-\iiint\left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\,dx\,dy\,dz, \end{aligned}$$

$n$ désignant la normale à la surface S vers l'extérieur de cette surface

La dernière intégrale triple s'étend seulement au volume compris entre la surface S et la surface Σ; mais il est aisé de voir qu'en la supposant étendue au corps A tout entier on néglige des quantités du même ordre de grandeur que l'une des dimensions linéaires du volume $v$; au même degré d'approximation, d'après un calcul fait au n° 3, la seconde intégrale peut être remplacée par

$$\mathbf{S}[\mathcal{A}_0\cos(n,x)+\mathcal{B}_0\cos(n,y)+\mathcal{C}_0\cos(n,z)]\frac{\cos(\mathrm{R},x)}{\mathrm{R}^2}\,d\mathrm{S}.$$

On aura donc

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi} = {} & \mathbf{S}[\mathcal{A}\cos(\mathrm{N},x)+\mathcal{B}\cos(\mathrm{N},y)+\mathcal{C}\cos(\mathrm{N},z)]\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\,d\Sigma \\ & -\mathcal{A}_0\,\mathbf{S}\frac{\cos(n,x)\cos(\mathrm{R},x)}{\mathrm{R}^2}\,d\mathrm{S} \\ & -\mathcal{B}_0\,\mathbf{S}\frac{\cos(n,y)\cos(\mathrm{R},x)}{\mathrm{R}^2}\,d\mathrm{S} \\ & -\mathcal{C}_0\,\mathbf{S}\frac{\cos(n,z)\cos(\mathrm{R},x)}{\mathrm{R}^2}\,d\mathrm{S} \\ & -\int\!\!\int\!\!\int\left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\,dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right.$$

De cette égalité (8) résulte en premier lieu cette proposition, dont nous verrons plus tard l'importance :

*Le symbole*

$$\int\!\!\int\!\!\int\left(\mathcal{A}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial\xi}+\mathcal{B}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\,\partial\xi}+\mathcal{C}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z\,\partial\xi}\right)dx\,dy\,dz,$$

*dans lequel l'intégration s'étend au corps* A *tout entier, n'a aucun sens.*

En effet, au second membre de l'égalité (8), les limites vers lesquelles tendent les coefficients de $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{C}_0$, lorsque la surface S se contracte indéfiniment, dépendent de la série de formes par laquelle cette surface passe en se contractant.

En second lieu, la comparaison des égalités (7) et (8) donne

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi} = \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\xi} & -\mathcal{A}_0\,\mathbf{S}\frac{\cos(n,x)\cos(\mathrm{R},x)}{\mathrm{R}^2}\,d\mathrm{S} \\ & -\mathcal{B}_0\,\mathbf{S}\frac{\cos(n,y)\cos(\mathrm{R},x)}{\mathrm{R}^2}\,d\mathrm{S} \\ & -\mathcal{C}_0\,\mathbf{S}\frac{\cos(n,z)\cos(\mathrm{R},x)}{\mathrm{R}^2}\,d\mathrm{S}. \end{aligned}\right.$$

Cette égalité (9) doit être substituée à la première des égalités (5); une substitution analogue doit affecter les deux autres égalités (5).

L'inexactitude des égalités (5) est ainsi mise directement en évidence. Néanmoins, pour continuer l'exposé de la théorie de Poisson, il nous faut conserver ces égalités; car c'est en les comparant aux égalités (4 *bis*) que nous obtiendrons les égalités

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi\,\frac{1-k}{k}\,\mathcal{A}_0 &= -\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{W})}{\partial\xi},\\ \frac{4}{3}\pi\,\frac{1-k}{k}\,\mathcal{B}_0 &= -\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{W})}{\partial\eta},\\ \frac{4}{3}\pi\,\frac{1-k}{k}\,\mathcal{C}_0 &= -\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathfrak{W})}{\partial\zeta},\end{aligned}\right.$$

qui représentent, dans la théorie de Poisson, les conditions fondamentales de l'équilibre magnétique.

6. Supposons qu'une substance magnétique, possédant un coefficient d'aimantation $k$ de valeur connue, soit placée dans un champ magnétique déterminé, c'est-à-dire dans un espace où la fonction $\mathfrak{W}$ est une fonction connue de $\xi, \eta, \zeta$. Dans ces conditions, grâce aux équations (10), il suffira de connaître l'expression de $\mathfrak{W}$ en fonction de $\xi, \eta, \zeta$, pour connaître en chaque point du corps considéré la grandeur et la direction de l'aimantation. C'est donc à la détermination de la fonction $\mathfrak{W}$ qu'est ramené le problème de l'aimantation par influence.

Nous avons vu que l'on pouvait écrire

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{W} &= \mathbf{S}\,\frac{1}{r}\left[\mathcal{A}\cos(N,x)+\mathcal{B}\cos(N,y)+\mathcal{C}\cos(N,z)\right]d\Sigma\\ &\quad -\iiint\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.\end{aligned}\right.$$

De cette expression de la fonction $\mathfrak{W}$, la théorie de la fonction potentielle permet de déduire plusieurs conséquences :

1° Si nous posons, suivant l'usage,

$$\Delta\mathfrak{W} = \frac{\partial^2\mathfrak{W}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{W}}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{W}}{\partial\zeta^2},$$

en tout point extérieur au corps A, nous avons

$$(11)\qquad \Delta\mathfrak{W} = 0.$$

2° Si en tout point du corps A, la quantité

$$\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial z}$$

est continue et admet des dérivées partielles du premier ordre par rapport à $x$.

$y$, $z$, $\mathfrak{W}$ admet en tout point du corps A des dérivées partielles du deuxième ordre par rapport à $\xi$, $\eta$, $\zeta$, et l'on a

$$\Delta\mathfrak{W} = -4\pi\left(\frac{\partial \mathcal{A}_0}{\partial\xi} + \frac{\partial \mathcal{B}_0}{\partial\eta} + \frac{\partial \mathcal{C}_0}{\partial\zeta}\right).$$

Différentions la première des égalités (10) par rapport à $\xi$, la seconde par rapport à $\eta$, la troisième par rapport à $\zeta$, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons que l'on a en tout point intérieur au corps A

$$\Delta(\mathfrak{V} + \mathfrak{W}) = -\frac{4}{3}\pi\,\frac{1-k}{k}\left(\frac{\partial \mathcal{A}_0}{\partial\xi} + \frac{\partial \mathcal{B}_0}{\partial\eta} + \frac{\partial \mathcal{C}_0}{\partial\zeta}\right).$$

Si l'on observe maintenant qu'en tout point du corps A on a

$$\Delta\mathfrak{V} = 0,$$

on voit aisément, par la comparaison des deux égalités précédentes, que l'on a aussi en tout point du corps A

$$\Delta\mathfrak{W} = 0. \tag{11 bis}$$

3° La fonction $\mathfrak{W}$ varie d'une manière continue lorsque le point M ($\xi$, $\eta$, $\zeta$) traverse la surface $\Sigma$ qui limite le corps A; mais ses dérivées partielles du premier ordre subissent une discontinuité, en sorte que l'on a, moyennant l'emploi d'une notation bien connue,

$$\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N_i} + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N_e} = -4\pi[\mathcal{A}_0\cos(N_e, x) + \mathcal{B}_0\cos(N_e, y) + \mathcal{C}_0\cos(N_e, z)],$$

ce qui, en remplaçant $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{C}_0$ par leurs valeurs déduites des équations (10), donne

$$\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N_e} + \frac{1+2k}{1-k}\,\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N_i} + \frac{3k}{1-k}\,\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial N_i} = 0, \tag{12}$$

relation dans laquelle $\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial N_i}$ a des valeurs connues, d'après la connaissance que l'on a du champ magnétique et de la forme du corps soumis à l'aimantation.

Ainsi donc la fonction $\mathfrak{W}$ est finie, continue et uniforme dans tout l'espace; elle est égale à 0 à l'infini; ses dérivées partielles du premier ordre sont finies, continues et uniformes dans tout l'espace, sauf sur la surface $\Sigma$ qui limite le corps soumis à l'aimantation : elles sont égales à 0 à l'infini; à la traversée de la surface $\Sigma$, elles vérifient la condition (12); dans tout l'espace, sauf sur la surface $\Sigma$, les dérivées partielles du second ordre de la fonction $\mathfrak{W}$ existent et vérifient l'équation de Laplace.

Telles sont les conditions obtenues par Poisson pour déterminer la fonction $\mathfrak{V}$ et, par conséquent, pour résoudre le problème de l'aimantation par influence.

L'établissement de ces conditions donne lieu à une nouvelle objection.

En effet, la déduction des égalités (11 *bis*) et (12) suppose l'emploi des égalités (10); d'autre part, les raisonnements employés par Poisson pour parvenir aux égalités (10) supposent qu'autour du point $(\xi, \eta, \zeta)$ on puisse tracer un volume $v$ limité par une surface $\sigma$ dont tous les points soient à une distance du point $(\xi, \eta, \zeta)$ très grande par rapport aux dimensions d'un élément magnétique et que, de plus, à l'intérieur de ce volume $v$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ varient d'une manière continue. Cette condition n'est plus remplie lorsque le point $M(\xi, \eta, \zeta)$ est très voisin de la surface $\Sigma$, ainsi que Poisson le remarque expressément : « Mais la condition, dit-il (I, p. 274), relative à la distance de M aux points extrêmes de $v$ ne sera pas remplie tout autour du point M, quand il sera situé à la surface de A ou extrêmement près de cette surface. L'action totale de ce corps sur les points très voisins de sa superficie dépendrait, en chaque point, de la disposition particulière des éléments magnétiques autour de ce point; c'est pourquoi nous ne chercherons pas à la déterminer; et il nous suffira de prévenir que tout ce qui va suivre n'est applicable qu'aux points de A, dont la distance à sa surface est très grande par rapport aux dimensions des éléments, ce qui aura lieu, du reste, dès que ces points seront situés à une profondeur appréciable. »

Il résulte de là que les égalités (10) ne sont point démontrées pour les points très voisins de la surface $\Sigma$; qu'il en est de même de l'égalité (11 *bis*); quant à l'égalité (12), comme pour l'établir on a fait usage des égalités (10) en les appliquant à des points infiniment voisins de la surface $\Sigma$, on doit la regarder comme entièrement douteuse.

7. Telle est la voie suivie par Poisson pour parvenir à mettre en équation le problème de l'aimantation par influence; cette voie, nous l'avons vue, est hérissée de difficultés analytiques qui suffiraient pour rendre extrêmement douteux les résultats obtenus. Mais, de plus, à ces critiques d'ordre analytique auxquelles prête la théorie de Poisson, viennent se joindre des objections fournies par l'expérience. C'est la détermination expérimentale de la valeur du coefficient $k$ pour différentes substances qui conduit à des conséquences incompatibles avec la théorie de Poisson.

Imaginons que l'on ait intégré les équations du problème de l'aimantation par influence pour un corps homogène de forme déterminée placé dans un champ magnétique déterminé. Le résultat de cette intégration sera d'exprimer la fonction $\mathfrak{V}$ au moyen des coordonnées $\xi$, $\eta$, $\zeta$ et du coefficient $k$; ce résultat peut donc s'exprimer par l'égalité

$$\mathfrak{V} = f(\xi, \eta, \zeta, k),$$

$f$ étant une fonction de forme connue. Dès lors, si, par une méthode expérimentale quelconque (il en existe un grand nombre que nous n'avons point l'intention d'étudier), on détermine la valeur de $\mathfrak{W}$ ou de l'une de ses dérivées partielles en un point déterminé de l'espace, on obtiendra une équation de laquelle on pourra tirer la valeur de $k$ pour le corps mis en expérience.

Un grand nombre de déterminations de ce genre ont été effectuées; elles conduisent au résultat général suivant :

Le coefficient $k$, très petit pour les corps faiblement magnétiques, est très voisin de l'unité pour le fer doux et supérieur à l'unité pour les corps diamagnétiques, tels que le bismuth.

Ce résultat est-il compatible avec la théorie de Poisson?

Dans la théorie de Poisson, $kv$ est le volume occupé par les éléments magnétiques sphériques que renferme un volume $v$ du corps aimanté. Soient R le rayon des éléments magnétiques et $2a$ la distance de leurs centres. Le rapport $k$ a alors pour valeur

$$k = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{8a^3} \quad \frac{\pi}{6}\left(\frac{R}{a}\right)^3;$$

R étant au plus égal à $a$, on voit que $k$ doit être compris entre 0 et $\frac{\pi}{6}$, conséquence incompatible avec les résultats de l'expérience.

Il y a plus; lorsque, pour un même corps, on répète la détermination de $k$ avec des champs magnétiques différents, on trouve pour $k$ des valeurs différentes, tandis que, dans la manière de voir de Poisson, on devrait obtenir une valeur constante.

On voit, par conséquent, combien la théorie imaginée par Poisson pour soumettre au calcul le problème de l'aimantation par influence, tout en constituant une importante et remarquable tentative, est encore éloignée du degré de rigueur analytique et d'accord avec l'expérience qu'il est permis d'exiger en une question offrant un si grand intérêt au double point de vue de la Physique générale et de la pratique.

## § II. — Formation des équations d'équilibre. — Travaux des successeurs de Poisson.

8. Les difficultés et inexactitudes que présente la théorie de l'aimantation par influence, imaginée par Poisson, ont amené plusieurs physiciens à modifier et à transformer la voie suivie par l'illustre géomètre pour parvenir à l'établissement des équations de l'équilibre magnétique. Nous allons examiner rapidement les tentatives qui leur sont dues.

Parmi les travaux que nous aurons à mentionner, le dernier en date est celui de M. É. Mathieu (LXI); c'est cependant par l'analyse de ce travail que nous commencerons notre exposé, parce que les idées de M. É. Mathieu sont, de toutes celles qui ont été émises au sujet de l'aimantation par influence, les plus voisines de celles de Poisson.

M. É. Mathieu commence par exposer la théorie même de Poisson; mais, dans cet exposé, il évite les inexactitudes commises par Poisson. Si, dans les raisonnements donnés par Poisson pour parvenir aux équations (10), on suppose que le volume $v$ ait non pas une forme arbitraire, mais la forme d'une sphère concentrique à l'élément magnétique, et si l'on suppose, de plus, le point $M(\xi, \eta, \zeta)$ placé au centre commun de l'élément magnétique et du volume $v$, toutes les objections que nous avons signalées disparaissent et les équations (10) se trouvent régulièrement déduites des hypothèses admises par Poisson.

Mais les équations (10) ainsi établies continuent à n'être valables que jusqu'à une distance de la surface du corps aimanté très petite par rapport aux dimensions de ce corps, mais très grande par rapport aux dimensions des éléments magnétiques, en sorte que la réduction du problème aux équations différentielles et l'établissement de la condition relative à la surface du corps aimanté donnent prise aux mêmes doutes que dans la théorie de Poisson.

D'autre part, l'exposé de M. É. Mathieu conduisant aux mêmes équations différentielles que la théorie de Poisson et donnant au coefficient $k$ la même signification, les difficultés provenant de la valeur trouvée expérimentalement pour ce coefficient dans le cas du fer doux et des corps diamagnétiques continuent de subsister.

Ce sont ces dernières objections que M. É. Mathieu s'est proposé de faire disparaître en modifiant les hypothèses fondamentales sur lesquelles repose la théorie de Poisson.

Pour que le coefficient $k$ pût devenir aussi voisin de l'unité que l'on voudrait, M. É. Mathieu a admis pour les éléments magnétiques d'un corps isotrope une forme différente de celle qu'avait imaginée Poisson. Il a supposé que les éléments magnétiques étaient des parallélépipèdes curvilignes rectangles, dont la hauteur, dirigée comme l'aimantation en un point de l'élément, était très faible par rapport aux deux autres dimensions du parallélépipède. Cette hypothèse une fois faite, on peut reprendre l'exposé de la théorie de Poisson, à la condition de supposer que le point $M(\xi, \eta, \zeta)$ est le centre de l'élément magnétique, et que le volume $v$ a la forme d'un parallélépipède homothétique de l'élément magnétique par rapport au point M. En conservant toujours au coefficient $k$ la signification qu'il a dans la théorie de Poisson, on obtient alors, non plus les équations (10),

mais les équations de même forme

$$
(13)\qquad \left\{
\begin{aligned}
4\pi \frac{1-k}{k}\,\mathcal{A}_0 &= \frac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{W})}{\partial \xi},\\
4\pi \frac{1-k}{k}\,\mathcal{B}_0 &= \frac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{W})}{\partial \eta},\\
4\pi \frac{1-k}{k}\,\mathcal{C}_0 &= \frac{\partial(\mathcal{V} + \mathfrak{W})}{\partial \zeta}.
\end{aligned}
\right.
$$

D'après la forme choisie pour les éléments magnétiques et pour le volume $v$, le rapport $k$, sans surpasser l'unité, peut en être aussi voisin que l'on veut.

Cette modification apportée à la théorie de Poisson ne suffirait pas, toutefois, à rendre compte des propriétés des corps diamagnétiques. Pour expliquer ces propriétés, M. É. Mathieu admet une hypothèse imaginée tout d'abord par M. Ed. Becquerel et développée par M. Edlung. D'après cette hypothèse, les corps diamagnétiques sont simplement des corps magnétiques plongés dans un milieu plus fortement magnétique. Soumettant cette hypothèse au calcul, M. É. Mathieu trouve qu'un corps dont le coefficient d'aimantation est $k_1$, plongé dans un milieu dont le coefficient d'aimantation est $k_2$, se comporte comme un corps de même forme, plongé dans un milieu magnétique, mais pour lequel on aurait

$$k = \frac{k_1 - k_2}{1 - k_2}.$$

D'après M. É. Mathieu, le corps sera magnétique si l'on a $k_1 > k_2$ et diamagnétique au contraire si l'on a $k_2 > k_1$; on voit, en effet, que l'on a alors

$$\frac{1-k}{k} = \frac{1-k_1}{k_1 - k_2},$$

et, $k_1$ étant forcément compris entre 0 et 1, cette quantité a le signe de $k_1 - k_2$.

Tels sont les principes fondamentaux de la théorie de l'aimantation par influence développée par M. É. Mathieu; comme la théorie de Poisson, elle donne prise à la critique du géomètre dans la réduction du problème de l'aimantation aux équations différentielles et aux objections de l'expérimentateur en ce qu'elle laisse au coefficient $k$ une valeur constante; mais elle fait disparaître quelques-unes des erreurs qui déparaient la théorie de Poisson.

9. En Angleterre, Green (IV) n'a donné que peu de développements à la théorie de l'aimantation par influence; il n'a guère fait qu'exposer la théorie de Poisson; Sir W. Thomson (XIX et XLVII) s'est à plusieurs reprises occupé de cette question; quant à Maxwell (LX, p. 51 et suiv.), il s'est contenté de re-

produire la théorie de Sir W. Thomson en l'abrégeant. C'est donc surtout l'étude des travaux de Sir W. Thomson qui importe pour la connaissance des idées des physiciens anglais sur cette question.

Sir W. Thomson repousse toute hypothèse sur les éléments magnétiques et sur les fluides magnétiques. Un aimant est alors défini simplement par la grandeur et la direction de l'aimantation en chaque point. Pour parvenir aux équations de l'aimantation par influence, Sir W. Thomson admet comme hypothèse fondamentale la proposition suivante, laquelle ne se présente dans la théorie de Poisson que comme une conséquence des hypothèses faites sur les éléments magnétiques :

*En tout point* $(\xi, \eta, \zeta)$ *d'un corps isotrope soumis à l'aimantation, les composantes* $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{C}_0$ *de l'aimantation sont proportionnelles respectivement aux composantes* X, Y, Z *de l'action magnétique exercée au point* $(\xi, \eta, \zeta)$ *par tous les aimants extérieurs à une sphère de rayon infiniment petit entourant le point* $(\xi, \eta, \zeta)$.

Cette proposition s'exprime par les égalités

$$\mathcal{A}_0 = p\mathrm{X}, \qquad \mathcal{B}_0 = p\mathrm{Y}, \qquad \mathcal{C}_0 = p\mathrm{Z}, \tag{14}$$

dans lesquelles $p$ est une constante quelconque.

Les égalités, faciles à obtenir,

$$\mathrm{X} = -h\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial\xi} + \frac{4}{3}\pi h\mathcal{A}_0,$$

$$\mathrm{Y} = -h\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial\eta} + \frac{4}{3}\pi h\mathcal{B}_0,$$

$$\mathrm{Z} = -h\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial\zeta} + \frac{4}{3}\pi h\mathcal{C}_0,$$

donnent alors

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{A}_0\left(1-\frac{4}{3}\pi ph\right) &= -h\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial\xi},\\ \mathcal{B}_0\left(1-\frac{4}{3}\pi ph\right) &= -h\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial\eta},\\ \mathcal{C}_0\left(1-\frac{4}{3}\pi ph\right) &= -h\frac{\partial(\mathrm{V}+\mathfrak{V})}{\partial\zeta}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Ces équations remplacent les équations (10) de la théorie de Poisson ; mais il est aisé de voir qu'elles évitent les principales objections auxquelles cette théorie pouvait donner lieu.

Tout d'abord, l'établissement de ces équations (15) n'est point sujet aux difficultés analytiques que soulevait, dans la théorie de Poisson, l'établissement des équations (10) ; en second lieu, ces équations (15) demeurent exactes dans la théorie de Sir W. Thomson, même pour les points infiniment voisins de la surface

du corps aimanté, en sorte que la déduction des équations différentielles et de la condition relative à la surface du corps aimanté se font sans donner prise à aucune critique; enfin, grâce à la grande indétermination laissée à la constante $p$, les propriétés du fer doux ou des corps diamagnétiques ne sont plus en contradiction avec la théorie.

Une seule objection demeure: c'est celle qui provient de la variation que subit, d'après les résultats de l'expérience, la valeur du coefficient $k$ ou, ce qui revient au même, de la quantité $p$, tandis que la constance de $p$ est admise par Sir W. Thomson comme un principe, qu'il nomme *Superposition des inductions magnétiques* et qu'il énonce ainsi (XIX et LVIII, p. 389 et suiv.).

« Différents aimants placés simultanément au voisinage d'un corps susceptible d'être aimanté par influence (ferromagnétique ou diamagnétique) y déterminent une distribution magnétique identique à celle que l'on obtiendrait en composant les distributions magnétiques déterminées par chacun des aimants, placé au même endroit, les autres aimants étant enlevés. »

Au sujet de ce principe, Sir W. Thomson ajoute :

« .... La seconde proposition, celle qui énonce l'indépendance mutuelle des inductions magnétiques superposées, revient à énoncer ce principe, que, lorsqu'on fait varier dans un certain rapport l'action exercée en un certain point d'un champ magnétique, l'aimantation de la substance qui se trouve en ce point varie dans le même rapport. Ce n'est évidemment point un principe entièrement général. Il n'est applicable ni à l'acier, ni aux substances qui forment les aimants naturels, ni, plus généralement, aux substances qui possèdent à un degré quelconque le pouvoir de résister à l'aimantation et à la désaimantation, pouvoir nommé par Poisson *force coercitive*, pouvoir en vertu duquel ces substances sont susceptibles de retenir l'aimantation d'une manière permanente. Il n'est pas non plus applicable au fer doux, comme le démontrent les expériences de Joule et les expériences plus récentes de Gartenhauser et Müller, si ce n'est comme loi d'aimantation approchée, lorsque les forces qui produisent l'aimantation ne surpassent pas une certaine limite. Mais il est extrêmement probable que ce principe constitue une loi vraiment approximative, sinon rigoureuse, pour l'aimantation de toute substance homogène de faible capacité inductive et dénuée de force coercitive (ce qui paraît être le cas de toutes les substances ferromagnétiques ou diamagnétiques qui ne renferment point de fer ou de nickel, ou qui n'en renferment qu'une petite quantité à l'état de combinaison chimique). Pour fonder une théorie complète de l'induction magnétique, il serait nécessaire de faire l'étude expérimentale des lois auxquelles est soumise, dans les diverses substances, l'action de la force coercitive et des variations que subit, avec la valeur actuelle de

l'aimantation, la capacité inductive du fer doux et peut-être des autres substances. »

Dans un cours sur la théorie du magnétisme professé en 1857 et publié depuis par son fils M. C. Neumann, M. F.-E. Neumann (LIII) s'exprime dans des termes analogues au sujet de la variation que, dans le fer doux, le coefficient $p$ subit avec l'intensité de l'aimantation; mais, pas plus que Sir W. Thomson, M. F.-E. Neumann n'essaye d'ébaucher une théorie de l'aimantation qui tienne compte de cette variation.

**10.** C'est à G. Kirchhoff (XXVIII) que l'on doit d'avoir marqué la voie à une semblable théorie.

Dans une Note ajoutée à un Mémoire dont le but principal était d'intégrer pour un cylindre indéfini les équations de l'aimantation par influence données par Poisson, G. Kirchhoff a introduit l'hypothèse que les équations (14) devaient être remplacées par les suivantes

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= X f\left(\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\right),\\ \mathcal{B}_0 &= Y f\left(\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\right),\\ \mathcal{C}_0 &= Z f\left(\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\right),\end{aligned}\right.$$

le symbole $f$ désignant une fonction qui dépend de la nature de la substance soumise à l'aimantation.

De ces équations on déduit facilement la nouvelle équation

$$\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2=(X^2+Y^2+Z^2)f^2\left(\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\right),$$

qui, résolue par rapport à $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, nous permet d'écrire

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}=g\left(\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}\right).$$

Si nous posons alors

$$\frac{1}{f[g(\zeta)]}=f_1(\zeta),$$

les égalités (16) deviendront

$$\begin{aligned} X &= \mathcal{A}_0 f_1\left(\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}\right),\\ Y &= \mathcal{B}_0 f_1\left(\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}\right),\\ Z &= \mathcal{C}_0 f_1\left(\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}\right).\end{aligned}$$

Ces égalités nous donneront alors

$$
(16\ bis)\qquad \left\{
\begin{aligned}
h\,\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\xi} &= -\,\mathcal{A}_0\left[f_1\left(\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}\right)-\frac{4}{3}\pi h\right],\\
h\,\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\eta} &= -\,\mathcal{B}_0\left[f_1\left(\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}\right)-\frac{4}{3}\pi h\right],\\
h\,\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\zeta} &= -\,\mathcal{C}_0\left[f_1\left(\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}\right)-\frac{4}{3}\pi h\right].
\end{aligned}\right.
$$

De ces équations on déduit

$$
\begin{aligned}
h^2\left\{\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\xi}\right]^2+\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\eta}\right]^2+\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\zeta}\right]^2\right\}&\\
=(\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2)\left[f_1\left(\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}\right)-\frac{4}{3}\pi h\right]^2&.
\end{aligned}
$$

Cette dernière équation, résolue par rapport à $\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}$, peut s'écrire

$$
\sqrt{\mathcal{A}_0^2+\mathcal{B}_0^2+\mathcal{C}_0^2}=g_1\left\{\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\xi}\right]^2+\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\eta}\right]^2+\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\zeta}\right]^2\right\}.
$$

Si l'on pose alors

$$
\frac{h}{f_1\left[g_1(\zeta)-\frac{4}{3}\pi h\right]}=\mathrm{F}(\zeta),
$$

les équations (16 *bis*) deviendront

$$
(17)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= -\,\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\xi}\,\mathrm{F}\left\{\sqrt{\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\xi}\right]^2+\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\eta}\right]^2+\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\zeta}\right]^2}\right\},\\
\mathcal{B}_0 &= -\,\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\eta}\,\mathrm{F}\left\{\sqrt{\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\xi}\right]^2+\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\eta}\right]^2+\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\zeta}\right]^2}\right\},\\
\mathcal{C}_0 &= -\,\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\zeta}\,\mathrm{F}\left\{\sqrt{\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\xi}\right]^2+\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\eta}\right]^2+\left[\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\zeta}\right]^2}\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Telles sont les équations qui, d'après la théorie de G. Kirchhoff, doivent être substituées aux équations (15), si l'on veut obtenir une théorie complète de l'aimantation des substances dénuées de force coercitive. La réduction de ces équations (17) en équations différentielles se fait de la même manière que la réduction en équations différentielles des conditions d'équilibre données par la théorie de Poisson; mais l'intégration de ces équations différentielles suppose la détermination expérimentale, pour chaque substance, de la forme de la fonction F. A cet égard, Kirchhoff observe que, si, partant de la théorie de Poisson et de Sir W. Thomson, on cherche à déterminer la valeur de $p$ par l'étude des



actions qu'exerce à l'extérieur un ellipsoïde placé dans un champ magnétique uniforme, on obtient pour

$$\frac{k}{1 - \frac{4}{3}\pi p k}$$

une valeur variable qui représente précisément

$$F\left\{\sqrt{\left[\frac{\partial(V + \mathfrak{W})}{\partial\xi}\right]^2 + \left[\frac{\partial(V + \mathfrak{W})}{\partial\eta}\right]^2 + \left[\frac{\partial(V + \mathfrak{W})}{\partial\zeta}\right]^2}\right\}.$$

C'est là la seule conséquence que M. G. Kirchhoff ait déduite de la théorie nouvelle de l'aimantation dont il avait posé les premiers jalons. A. Beer (XL), en exposant la théorie de M. G. Kirchhoff, n'est pas allé plus loin que lui.

## § III. — Théorèmes généraux et cas particuliers d'équilibre.

10. Nous avons examiné avec grand détail la voie suivie par les divers physiciens qui ont traité de l'aimantation par influence pour parvenir aux conditions de l'équilibre magnétique. Il nous reste à indiquer brièvement les théorèmes généraux qui ont été déduits de ces conditions et les cas particuliers où l'on est parvenu à intégrer les équations différentielles auxquelles ces conditions peuvent se réduire.

Jusqu'ici, aucune conséquence n'a été déduite des équations générales données par M. G. Kirchhoff, si ce n'est la remarque que nous avons indiquée au sujet d'un ellipsoïde placé dans un champ magnétique uniforme. Toutes les recherches que nous allons mentionner se rapportent donc exclusivement aux équations déduites de la théorie de Poisson et de Sir W. Thomson; elles supposent toutes la constance du coefficient d'aimantation.

Tout le problème de l'aimantation par influence se ramène à déterminer la forme que prend la fonction $\mathfrak{W}$ lorsqu'un corps donné est placé dans un champ magnétique donné. M. F.-E. Neumann (LIII) a démontré que deux fonctions $\mathfrak{W}$ distinctes ne pouvaient satisfaire aux équations du problème, et que, par conséquent, le problème de l'aimantation par influence ne pouvait, dans chaque cas, admettre plus d'une solution. Sir W. Thomson (XLVII) a donné de ce théorème une démonstration un peu différente de celle de F.-E. Neumann. En même temps, Sir W. Thomson a démontré que les équations de l'induction magnétique déterminaient toujours une fonction $\mathfrak{W}$. Sa démonstration, imitée de celle qu'il avait imaginée pour le principe dit de Lejeune-Dirichlet, donne naturellement prise aux critiques adressées par M. Weierstrass à cette dernière. La dé-

monstration de Sir W. Thomson s'applique également au problème de l'induction magnétique des cristaux.

Sir W. Thomson a également donné, mais sans démonstration complète, quelques propositions générales sur la stabilité de l'équilibre d'une masse magnétique placé en présence d'aimants permanents (XVIII) et sur les phénomènes thermiques qui accompagnent le déplacement d'une masse magnétique dans un champ magnétique (LVII, t. I, p. 712). Nous ne faisons qu'indiquer ici l'existence de ces propositions, que nous aurons à discuter en détail au cours d'un travail ultérieur.

**12.** C'est surtout sur l'intégration des équations de l'équilibre magnétique que les géomètres ont porté leurs efforts; nous nous contenterons d'indiquer très rapidement ici les cas particuliers qu'ils sont parvenus à traiter.

Dans son premier Mémoire sur la théorie du magnétisme (I), après avoir établi les équations de l'aimantation par influence, Poisson a intégré ces équations pour une masse comprise entre deux sphères concentriques, dans le cas où la force qui produit l'aimantation provient de masses extérieures à la sphère qui enveloppe le corps soumis à l'aimantation. Dans la partie creuse que renferme la couche sphérique, dans l'intérieur de cette couche et à l'extérieur, la fonction $\mathfrak{V}$ est exprimée soit par une série développée suivant les puissances croissantes du rayon vecteur, soit par la somme d'une semblable série et d'une série ordonnée suivant les inverses de la même quantité, soit par une série de cette dernière forme. Les coefficients de ces séries sont des fonctions de deux angles que l'on peut déterminer lorsqu'on sait développer d'une manière analogue le potentiel des forces qui produisent l'aimantation.

Cette méthode générale a été appliquée en particulier par Poisson au cas où la force qui produit l'aimantation est une force constante en grandeur et en direction comme la force magnétique terrestre.

Dans un Mémoire ultérieur (II), Poisson a déterminé la distribution du magnétisme sur un ellipsoïde à trois axes inégaux placé dans un champ magnétique constant; cette distribution possède l'importante propriété d'être *uniforme;* il a de plus fait usage des principes établis dans son premier Mémoire pour discuter la méthode que Barlow avait imaginée en vue de compenser les déviations produites sur le compas d'un navire par les masses de fer que le navire renferme. Beer (XXX), Plücker (XXVII) et Lipschitz (XXVII) ont donné une solution simplifiée du même problème.

Récemment, M. Greenhill (LIV) a étendu la méthode donnée par Poisson, pour résoudre le problème de l'aimantation d'un ellipsoïde plein, au problème de l'aimantation de la couche comprise entre deux ellipsoïdes concentriques et homothétiques.

F.-E. Neumann (LIII) a repris la solution donnée par Poisson de l'aimantation d'une sphère pleine ou creuse sous l'action d'aimants extérieurs quelconques. Après avoir régularisé la solution générale, il a traité en particulier le cas où la sphère est soumise à l'action d'un barreau d'acier uniformément aimanté et dirigé suivant un de ces rayons, et le cas où la sphère est soumise à l'action d'un courant circulaire ayant son centre sur l'un des rayons de la sphère et son plan perpendiculaire à ce rayon.

F.-E. Neumann a étendu (VIII) au cas d'un ellipsoïde de révolution la méthode donnée par Poisson et perfectionnée par lui pour résoudre le problème de l'aimantation d'une sphère soumise à l'action d'aimants extérieurs quelconques.

Si l'on fait croître indéfiniment le grand axe de l'ellipse méridienne en laissant fixe le centre et le petit axe, l'ellipsoïde de révolution se transforme en un cylindre indéfini; mais, en général, les formules de F.-E. Neumann perdent toute signification lorsque l'excentricité de l'ellipse méridienne croît au delà de toute limite; l'aimantation d'un cylindre de révolution indéfini est donc un problème qui doit être traité directement. C'est ce qu'a fait G. Kirchhoff (XXVIII) dans l'important Mémoire que nous avons déjà eu occasion de citer au n° 10 de la présente Introduction.

Dans un autre Mémoire, G. Kirchhoff (XLI) a résolu complètement et d'une manière très simple le problème de l'aimantation par influence pour un anneau de fer doux, limité par un tore obtenu en faisant tourner autour d'un axe une courbe fermée quelconque, dans le cas où cet anneau est entouré par une bobine formée de courants fermés, équidistants, placés sur les méridiens d'un autre anneau ayant même axe que le premier. Il en a déduit une méthode pour déterminer les coefficients d'induction, méthode pleine d'élégance et plusieurs fois employée par les expérimentateurs.

Enfin F.-E. Neumann (LIII) a montré que les composantes de l'aimantation en chaque point d'un ellipsoïde à trois axes inégaux aimanté par des forces quelconques peuvent toujours s'obtenir sous forme finie au moyen de formules où figurent des intégrales triples étendues au volume de l'ellipsoïde. Ces formules très simples sont les suivantes :

Soit $r$ la distance du point $(x, y, z)$ au point $(\xi, \eta, \zeta)$; supposons que les axes de coordonnées coïncident avec les axes de l'ellipsoïde; posons

$$-\frac{\partial}{\partial\xi}\int\int\int\frac{1}{r}\,dx\,dy\,dz = \xi\mathfrak{M},$$

$$-\frac{\partial}{\partial\eta}\int\int\int\frac{1}{r}\,dx\,dy\,dz = \eta\mathfrak{N},$$

$$-\frac{\partial}{\partial\zeta}\int\int\int\frac{1}{r}\,dx\,dy\,dz = \zeta\mathfrak{P}.$$

et nous aurons

$$\mathcal{A}_0 = \frac{ph}{1 - p\left(\mathfrak{M} + \frac{4\pi}{3}\right)} \int\int\int \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\, dx\, dy\, dz,$$

$$\mathcal{B}_0 = \frac{ph}{1 - p\left(\mathfrak{N} + \frac{4\pi}{3}\right)} \int\int\int \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\, dx\, dy\, dz,$$

$$\mathcal{C}_0 = \frac{ph}{1 - p\left(\mathfrak{P} + \frac{4\pi}{3}\right)} \int\int\int \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\, dx\, dy\, dz.$$

Tels sont les principaux cas où les équations de l'aimantation par influence données par Poisson aient été intégrées par les géomètres. Leur petit nombre ne doit point surprendre si l'on observe que le problème à résoudre est beaucoup plus difficile que le problème de la distribution électrique sur les corps conducteurs, problème si difficile à aborder cependant dans la plupart des cas.

## § IV. — Induction magnétique des corps cristallisés.

13. Poisson avait donné les équations sur lesquelles repose la théorie, encore admise aujourd'hui, de l'induction magnétique des corps cristallisés vingt-trois ans avant qu'un expérimentateur songeât à découvrir le phénomène dont l'illustre géomètre avait d'avance indiqué les lois.

Dans les corps isotropes, il est naturel de supposer que les éléments magnétiques sont sphériques, ou du moins, s'ils ne sont pas sphériques, mais d'une forme moins régulière, qu'ils sont distribués indifféremment dans tous les sens. Il n'en est plus de même dans le cas des corps cristallisés.

« Le rapport entre la somme des éléments magnétiques et le volume entier dans chaque corps aimanté, dit Poisson (I, p. 238), n'est pas la seule donnée relative à ce corps, indépendamment de sa forme ou de ses dimensions d'où puisse dépendre l'intensité des actions magnétiques; la forme des éléments pourra ainsi influer sur cette intensité, et cette influence aura cela de particulier qu'elle ne sera pas la même en des sens différents. Supposons, par exemple, que les deux axes magnétiques sont des ellipsoïdes dont les axes ont la même direction dans toute l'étendue d'un même corps et que ce corps est une sphère aimantée par influence dans laquelle la force coercitive est nulle; les attractions ou répulsions qu'elle exercera au dehors seront différentes dans le sens des axes de ses éléments et dans tout autre sens; en sorte que, si l'on fait tourner cette sphère sur elle-même, son action sur un même point changera en général en grandeur et en direction; mais, si les éléments magnétiques sont des sphères de diamètres égaux

ou inégaux, ou bien s'ils s'écartent de la forme sphérique, mais qu'ils soient disposés sans aucune régularité dans l'intérieur d'un corps aimanté par influence, leurs formes n'influeront plus sur les résultats qui dépendront seulement de la somme de leurs volumes, comparée au volume entier de ce corps, et qui seront alors les mêmes en tout sens. Ce dernier cas est celui du fer forgé, et sans doute aussi des autres corps non cristallisés dans lesquels on a observé le magnétisme; mais il serait curieux de chercher si le premier cas n'aurait pas lieu lorsque ces substances sont cristallisées; on pourrait s'en assurer par l'expérience, soit en approchant un cristal d'une aiguille aimantée librement suspendue, soit en faisant osciller de petites aiguilles taillées dans des cristaux en toute sorte de sens et soumises à l'action d'un très fort aimant. »

Le problème de l'induction magnétique d'un corps cristallisé se traitera donc de la même manière que le problème de l'induction magnétique d'un corps amorphe. Mais, tandis que pour ce dernier on pouvait supposer que les éléments magnétiques ont la forme sphérique, pour le premier problème on devra laisser quelconques la forme et l'orientation des éléments magnétiques, en supposant seulement que cette forme et cette orientation sont les mêmes pour tous les éléments.

Ce problème nouveau a été traité par Poisson en même temps que le premier. Dans l'un comme dans l'autre, on a les équations (3)

$$-h\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi}+\alpha=0,$$

$$-h\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta}+\beta=0,$$

$$-h\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \zeta}+\gamma=0;$$

mais, au lieu d'avoir, comme dans le cas des corps isotropes,

$$\alpha=-\frac{4\pi h}{3k}\mathcal{A}_0,\qquad \beta=-\frac{4\pi h}{3k}\mathcal{B}_0,\qquad \gamma=-\frac{4\pi h}{3k}\mathcal{C}_0,$$

il est très facile de voir, selon Poisson, que, dans le cas des corps cristallisés, on doit avoir des relations de la forme

$$\alpha=-\frac{h}{k}(P\mathcal{A}_0+Q\mathcal{B}_0+R\mathcal{C}_0),$$

$$\beta=-\frac{h}{k}(P'\mathcal{A}_0+Q'\mathcal{B}_0+R'\mathcal{C}_0),$$

$$\gamma=-\frac{h}{k}(P''\mathcal{A}_0+Q''\mathcal{B}_0+R''\mathcal{C}_0),$$

$P$, $Q$, $R$, $P'$, $Q'$, $R'$, $P''$, $Q''$, $R''$ étant neuf coefficients positifs dont la valeur, qui

est la même en tous les points d'un corps homogène, dépend seulement de la forme des éléments magnétiques.

C'est seulement lorsqu'on introduit l'hypothèse que l'action d'une sphère aimantée ne doit point changer par une rotation autour de son centre que ces coefficients sont assujettis aux relations

$$\begin{aligned} &P' = 0, \qquad P'' = 0,\\ &Q'' = 0, \qquad Q = 0,\\ &R = 0, \qquad R' = 0,\\ &P = Q' = R'', \end{aligned}$$

conforme à ce qui a été trouvé en supposant aux éléments la forme sphérique.

D'après cela, en suivant un raisonnement semblable à celui par lequel Poisson a établi les équations de l'aimantation des corps isotropes, on est conduit, pour les corps anisotropes, aux conditions d'équilibre suivantes

$$\begin{aligned} \frac{1-k}{k}(P\mathcal{A}_0 + Q\mathcal{B}_0 + R\mathcal{C}_0) &= -\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\xi},\\ \frac{1-k}{k}(P'\mathcal{A}_0 + Q'\mathcal{B}_0 + R'\mathcal{C}_0) &= -\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\eta},\\ \frac{1-k}{k}(P''\mathcal{A}_0 + Q''\mathcal{B}_0 + R''\mathcal{C}_0) &= -\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\zeta}, \end{aligned}$$

qui peuvent encore s'écrire ainsi

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1-k}{k}\mathcal{A}_0 &= -\left[p\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\xi} + q\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\eta} + r\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\zeta}\right],\\ \frac{1-k}{k}\mathcal{B}_0 &= -\left[p'\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\xi} + q'\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\eta} + r'\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\zeta}\right],\\ \frac{1-k}{k}\mathcal{C}_0 &= -\left[p''\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\xi} + q''\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\eta} + r''\frac{\partial(\mathcal{V}+\mathcal{W})}{\partial\zeta}\right]. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients positifs $p, q, r, p', q', r', p'', q'', r''$ ont avec $P, Q, R, P', Q', R', P'', Q'', R''$ des relations faciles à trouver.

Il suffira d'appliquer à ces équations des méthodes analogues à celles que Poisson a employées dans l'étude des corps isotropes pour obtenir la théorie, encore admise aujourd'hui, de l'induction magnétique des cristaux. Cette théorie offre les mêmes difficultés et est soumise aux mêmes objections que la théorie de l'induction magnétique des corps isotropes.

14. Poisson avait d'avance indiqué la voie par laquelle on parviendrait à découvrir les phénomènes d'induction magnétique des cristaux et les principes qui serviraient à expliquer ces phénomènes. Les expérimentateurs tardèrent vingt-

trois années à reconnaître les phénomènes dont on leur avait signalé l'existence et, lorsqu'ils les eurent découverts, il leur fallut plus de deux ans pour les comprendre.

En 1847, Plücker (VII) ayant placé des cristaux diversement taillés entre les deux pôles d'un électro-aimant semblable à celui au moyen duquel Faraday avait découvert le diamagnétisme et la polarisation rotatoire magnétique, observa les positions que prenaient ces cristaux et crut pouvoir en conclure à une action exercée par le magnétisme sur les axes optiques, action différente du magnétisme et du diamagnétisme. Voici la loi expérimentale par laquelle il résumait ses recherches :

« Si l'on place un cristal uniaxe quelconque entre les deux pôles d'un aimant, l'axe est repoussé par chacun des deux pôles. Si le cristal est biaxe, chacun des deux axes optiques est repoussé avec la même force par chacun des deux pôles.

» La force qui produit cette répulsion est indépendante de la propriété magnétique ou diamagnétique de la masse du cristal; elle varie plus lentement avec la distance aux pôles de l'aimant que les forces magnétiques ou diamagnétiques provenant des mêmes pôles et agissant sur le cristal. »

Après un travail de Faraday (X), dans lequel l'illustre physicien parvenait à des résultats en désaccord avec la loi énoncée par Plücker, celui-ci publia deux Mémoires (XI, XII) dans lesquels, sans renoncer à son interprétation des phénomènes observés tout d'abord par lui, il modifiait légèrement l'énoncé de la loi qu'il avait cru démontrer dans son premier Mémoire, en admettant que l'action d'un pôle d'aimant sur un axe optique était répulsive ou attractive, selon que le cristal était négatif ou positif.

Ce n'est qu'après tous ces travaux, poursuivis dans une voie inexacte, que Plücker (XIII) d'une part, Knoblauch et Tyndall (XIV) d'autre part, arrivèrent à reconnaître la véritable cause des phénomènes observés et à attribuer ces phénomènes à une capacité d'aimantation des corps cristallisés variable suivant la direction.

« Tous ces phénomènes, que j'ai observés, dit Plücker, s'expliquent en supposant qu'une polarité magnétique ou diamagnétique (selon que la substance est magnétique ou diamagnétique) peut se développer par induction dans les cristaux et s'y développe plus ou moins aisément suivant les diverses directions, fait qui est lié aux variations de l'élasticité de l'éther. »

Knoblauch et Tyndall concluaient ainsi leur Mémoire :

« La loi de Plücker, qui attribue aux axes optiques la manière particulière dont se comportent les cristaux entre les pôles d'un aimant, ne peut être conservée sous sa forme primitive.

» Tous les phénomènes présentés par le spath d'Islande s'expliquent en supposant que les échantillons magnétiques sont plus faiblement magnétiques dans la direction du clivage et que les échantillons diamagnétiques sont plus faiblement diamagnétiques dans la même direction. »

l'aimantation par influence des cristaux, sans se préoccuper de l'établissement même de ces équations; c'est aussi en suivant la méthode de Poisson qu'August Beer (XL) a mis en équation le problème de l'induction cristalline. Il a intégré les équations différentielles de ce problème pour le cas d'une sphère cristalline placée dans un champ magnétique uniforme. Malheureusement, dans le développement de la théorie de l'induction cristalline, il a commis certaines inexactitudes analytiques, comme l'a fait remarquer M. E. Mathieu.

M. E. Mathieu (LXI, p. 165) est parvenu à des équations d'équilibre analogues à celles que l'on déduit de la théorie de Poisson, mais il y est parvenu par une voie particulière qu'il nous est impossible d'analyser brièvement ici. Remarquons seulement qu'elle est liée à une hypothèse sur la manière dont les actions magnétiques s'exercent au sein d'une substance cristallisée et qu'elle conduit à une théorie qui, de l'aveu même de son auteur, ne peut subsister si les aimants agissants et le milieu qui sépare ces aimants du cristal influencé ne sont pas formés de la même substance que le cristal.

## Conclusion.

L'examen historique de la théorie de l'aimantation par influence nous semble amener à la conclusion suivante :

Poisson avait cherché à déduire les équations de l'équilibre magnétique d'hypothèses simples sur la nature des corps aimantés. Mais cette déduction a rencontré trois sortes d'objections :

1° Les hypothèses sur lesquelles elle reposait, acceptées volontiers par les physiciens contemporains de Poisson, semblent peu compatibles avec les idées actuellement en faveur auprès des physiciens.

2° La rigueur des démonstrations mathématiques données par Poisson laisse beaucoup à désirer.

3° Certaines conséquences de la théorie, telles que la constance du coefficient d'aimantation, ne sont pas conformes à l'expérience.

Ces objections, les théoriciens qui, après Poisson, se sont occupés de l'aimantation par influence ont cherché à les éliminer; mais ils n'y sont parvenus qu'en admettant d'emblée les équations de l'équilibre magnétique sans chercher à les relier à des hypothèses plus simples ou à une théorie plus générale. Il nous semble donc qu'il y a dans cette théorie un progrès à réaliser ; ce progrès consisterait à déduire la théorie de l'aimantation par influence d'un petit nombre de faits d'expérience simples, des lois de Coulomb par exemple, au moyen de principes généraux d'équilibre, tels que ceux que fournit la Thermodynamique.

Les travaux ultérieurs de Plücker et Beer (XV, XX, XXV), de Knoblauch et Tyndall (XVI, XXIII, XXIV), de Hankel (XXI) et de Faraday (XXIX) ne cessèrent de confirmer ces conclusions.

15. La théorie donnée par Poisson du magnétisme des cristaux avait été laissée dans l'oubli par les auteurs de ces recherches expérimentales. Sir W. Thomson (XIX) appela l'attention des physiciens sur cette théorie. Après avoir rappelé les idées de Poisson et transcrit les égalités (18) auquel l'illustre géomètre était parvenu, il ajoute :

« Tout le reste de la théorie de Poisson se borne à la considération du cas des substances non cristallisées ; dans ce cas, il est démontré que les coefficients $p$, $q'$, $r''$ sont égaux entre eux et que les autres sont égaux à zéro. Mais cela n'indique rien sur la possibilité d'établir des relations générales entre les neuf coefficients, quelle que soit la nature de la substance. J'ai trouvé que les relations suivantes, par lesquelles ces neuf coefficients se réduisent à six, devaient être remplies quelle que soit la nature de la substance :

$$(19)\qquad \begin{cases} r' = q'', \\ p'' = r, \\ q = p'. \end{cases}$$

» La démonstration de ces relations est fondée non point sur une proposition incertaine ou sur une hypothèse spéciale, mais sur ce principe qu'une sphère d'une substance quelconque, placée dans un champ magnétique uniforme et capable de tourner autour d'un axe fixe perpendiculaire aux lignes de force, ne peut devenir une source inépuisable d'effet mécanique. »

Cette démonstration a été exposée plus tard par Sir W. Thomson (XLIII) et reproduite par J. Clerk Maxwell (LX, t. II, p. 69).

Cette remarque de Sir W. Thomson achevait de marquer les principes d'une théorie de l'induction magnétique des cristaux et d'en établir les équations différentielles. Aussi Sir W. Thomson put-il confondre dans une seule et même étude (XLVII) la théorie de l'aimantation par influence des substances amorphes ou cristallines et démontrer pour les unes comme pour les autres que le problème admettait une et une seule solution. Néanmoins Plücker se contentait encore, en 1858 (XXVIII), d'une théorie approchée qu'il avait ébauchée quelques années auparavant (XXV), théorie dans laquelle il calculait, en partant des résultats obtenus par Poisson pour les corps isotropes, l'action d'un pôle sur l'élément magnétique d'un cristal, élément qu'il assimilait à un ellipsoïde infiniment petit, et dans laquelle il négligeait la réaction de ces éléments les uns sur les autres.

Sir W. Thomson s'est contenté d'emprunter à Poisson les équations qui règlent

l'aimantation par influence des cristaux, sans se préoccuper de l'établissement même de ces équations; c'est aussi en suivant la méthode de Poisson qu'August Beer (XL) a mis en équation le problème de l'induction cristalline. Il a intégré les équations différentielles de ce problème pour le cas d'une sphère cristalline placée dans un champ magnétique uniforme. Malheureusement, dans le développement de la théorie de l'induction cristalline, il a commis certaines inexactitudes analytiques, comme l'a fait remarquer M. E. Mathieu.

M. E. Mathieu (LXI, p. 165) est parvenu à des équations d'équilibre analogues à celles que l'on déduit de la théorie de Poisson, mais il y est parvenu par une voie particulière qu'il nous est impossible d'analyser brièvement ici. Remarquons seulement qu'elle est liée à une hypothèse sur la manière dont les actions magnétiques s'exercent au sein d'une substance cristallisée et qu'elle conduit à une théorie qui, de l'aveu même de son auteur, ne peut subsister si les aimants agissants et le milieu qui sépare ces aimants du cristal influencé ne sont pas formés de la même substance que le cristal.

## Conclusion.

L'examen historique de la théorie de l'aimantation par influence nous semble amener à la conclusion suivante :

Poisson avait cherché à déduire les équations de l'équilibre magnétique d'hypothèses simples sur la nature des corps aimantés. Mais cette déduction a rencontré trois sortes d'objections :

1° Les hypothèses sur lesquelles elle reposait, acceptées volontiers par les physiciens contemporains de Poisson, semblent peu compatibles avec les idées actuellement en faveur auprès des physiciens.

2° La rigueur des démonstrations mathématiques données par Poisson laisse beaucoup à désirer.

3° Certaines conséquences de la théorie, telles que la constance du coefficient d'aimantation, ne sont pas conformes à l'expérience.

Ces objections, les théoriciens qui, après Poisson, se sont occupés de l'aimantation par influence ont cherché à les éliminer; mais ils n'y sont parvenus qu'en admettant d'emblée les équations de l'équilibre magnétique sans chercher à les relier à des hypothèses plus simples ou à une théorie plus générale. Il nous semble donc qu'il y a dans cette théorie un progrès à réaliser; ce progrès consisterait à déduire la théorie de l'aimantation par influence d'un petit nombre de faits d'expérience simples, des lois de Coulomb par exemple, au moyen de principes généraux d'équilibre, tels que ceux que fournit la Thermodynamique.

LISTE DES PRINCIPAUX TRAVAUX

SUR LA

# THÉORIE DE L'AIMANTATION PAR INFLUENCE.

1824. POISSON........ I. *Mémoire sur la Théorie du Magnétisme.* Lu à l'Académie royale des Sciences le 2 février 1824 (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, années 1821 et 1822, t. V, p. 247-338). — Extraits du même (*Annales de Chimie et de Physique*, t. XXIV, p. 113-137; 1824. *Bulletin de la Société Philomathique*, année 1824, p. 3-9).

1824. POISSON........ II. *Second Mémoire sur la Théorie du Magnétisme.* Lu à l'Académie royale des Sciences le 27 décembre 1824 (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, années 1821 et 1822, t. V, p. 488-533). — Extraits du même (*Annales de Chimie et de Physique*, t. XXVIII, p. 5-18; 1825. *Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. III, p. 429-440; 1825).

1826. POISSON........ III. *Mémoire sur la Théorie du Magnétisme en mouvement.* Lu à l'Académie des Sciences le 10 juillet 1826 (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1823, t. VI, p. 441-570). — Extraits du même (*Annales de Chimie et de Physique*, t. XXXII, p. 225-240; 1826. *Nouveau Bulletin de la Société philomathique*, année 1826, p. 115-117 et 132-133).

1828. GEORGE GREEN .. IV. *An essay on the application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism.* Nottingham, 1828. — Traduction allemande du même (*Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik*, t. XXXIX, p. 73-89, 1850; t. XLIV, p. 356-374, 1852; t. XLVII, p. 161-221, 1854). Réimprimé dans (XLII).

1846. W. Thomson.... V. *Note on induced Magnetism in a plate.* (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, Vol. I; 1846). Réimprimé dans (XLVIII) et dans (LVIII), art. ix.

1847. W. Thomson.... VI. *On the forces experienced by small spheres under magnetic influence; and on some of the phenomena presented by diamagnetic substances* (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, Vol. II; 1847). Réimprimé dans (XLVIII) et dans (LVIII), art. xxxiii.

1847. J. Plücker..... VII. *Ueber die Abstossung der optischen Axen der Krystalle durch die Pole der Magnete* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. LXXII, p. 315; 1847).

1848. F.-E. Neumann.. VIII. *Entwickelung der in elliptischen Coordinaten ausgedrückten reciproken Entfernung zweier Punkte in Reihen, welche nach den Laplace'schen* $Y^{(n)}$ *fortschreiten; und Anwendung dieser Reihen zur Bestimmung des magnetischen Zustandes eines Rotations-Ellipsoïdes, welches durch vertheilende Kräfte erregt ist* (*Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd XXXVII, p. 21-50; 1848).

1848. W. Thomson... IX. *On the equilibrium of magnetic or diamagnetic bodies of any form, under the influence of the terrestrial magnetic force* (*British Association. Report.* Part II; 1848.

1848. Faraday........ X. *On the crystalline polarity of bismuth and other bodies, and on its relation to the magnetic form of force* (*Experimental researches on Electricity*, série XXII; 1848. *Philosophical Transactions*, p. 1-41; 1849. *Annales de Chimie et de Physique*, t. XXXVI, p. 247-254; 1852. *Bibliothèque universelle. Archives*, t. XII, p. 89-121; 1849. *Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. LXXVI, p. 144-149; 1849).

1849. J. Plücker..... XI. *Ueber die neue Wirkung des Magnets auf einige Krystalle, die eine vorherrschende Spaltungsfläche besitzen. Einfluss des Magnetismus auf Krystall-Bildung* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. LXXVI, p. 576; 1849).

1849. J. Plücker..... XII. *Ueber die magnetische Beziehung der positiven und negativen optischen Axen der Krystalle* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. LXXVII, p. 447; 1849).

[illegible]

1851. TYNDALL........ XXII. *On diamagnetism and magnecrystallic induction* (*Philosophical Magazine*, 4e série, t. II, p. 165-168; 1851. — *Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. LXXXIII, p. 1-37; 1851. — *Annales de Chimie et de Physique*, t. XXXVII, p. 76-79; 1853).

1851. TYNDALL........ XXIII. *Ueber Diamagnetismus und magnecrystallinische Wirkung* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. LXXXIII, p. 384-416; 1851).

1852. TYNDALL........ XXIV. *On Poisson's theoretic anticipation of magnecrystallic action* (*British Association. Report*, Part II, p. 20; 1852).

1852. J. PLÜCKER..... XXV. *Ueber die Theorie des Diamagnetismus, die Erklärung des Ueberganges magnetischen Verhaltens in diamagnetisches und mathematische Begründung der bei Krystallen beobachteten Erscheinungen* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. LXXXVI, p. 1; 1852).

1852. W. THOMSON.... XXVI. *On the equilibrium of elongated masses of ferromagnetic substances in uniform and varied fields of force* (*British Association. Report*, Part II; 1852). Réimprimé dans (XLVIII) et dans (LVIII), art. XXV.

1853. LIPSCHITZ....... XXVII. *Determinatio status magnetici viribus inducentibus commoti in ellipsoide* (*Dissertation*, Berlin; 1853).

1853. G. KIRCHHOFF... XXVIII. *Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen* (*Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik*, Bd. XLVIII, p. 348-376; 1853). Réimprimé dans (LV), p. 193.

1855. FARADAY........ XXIX. *Constancy of differential magnecrystallic force in different media* (*Experimental researches in Electricity*, série XXX; 1855. — *Philosophical Transactions*, p. 159-180; 1856. — *Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. C, p. 111-127; 1857).

1855. A. BEER....... XXX. *Vertheilung der Elektricität eines ellipsoïdischen Conductors durch den Einfluss einer entfernten elektrischen Masse* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, t. XCIV, p. 192-193; 1855).

1855. W. Thomson ... XXXI. *Elementary demonstrations of propositions in the theory of magnetic force* (*Philosophical Magazine*, 4e série, t. IX, p. 241, 248; 1855). Réimprimé dans (XLVIII) et dans (LVIII), art. xxxvii.

1855. W. Thomson ... XXXII. *Letter to Professor Tyndall on the « magnetic medium » and on the effects of compression* (*Philosophical Magazine*, 4e série, t. IX, p. 290-293; 1855). Réimprimé dans (XLVIII) et dans (LVIII), art. xxxviii.

1855. Tyndall........ XXXIII. *On the nature of forces by which bodies are repelled from the poles of a magnet; to which is prefixed an account of some experiments on moleculars influences* (*Philosophical Transactions*, p. 1-52; 1855. *Philosophical Magazine*, 4e série, t. X, p. 153-179 et 257-290; 1855).

1855. Tyndall........ XXXIV. *Letter to Professor W. Thomson on reciprocal molecular induction* (*Philosophical Magazine*, 4e série, t. X, p. 422-423; 1855). Réimprimé dans (XLVIII) et dans (LXVIII), art. xxxviii.

1856. W. Thomson ... XXXV. *Letter to Professor J. Tyndall on the reciprocal action of diamagnetic particles* (*Philosophical Magazine*, 4e série, t. XI, p. 66-67; 1856). Réimprimé dans (XLVIII), art. xxxviii.

1856. Tyndall........ XXXVI. *On the relation of diamagnetic polarity to magnecrystallic induction* (*Philosophical Magazine*, 4e série, t. XI, p. 125-137; 1856).

1856. W. Thomson ... XXXVII. *Sui fenomeni magnetocristallini* (*Nuovo Cimento*, t. IV, p. 192-198; 1856).

1858. J. Plücker ..... XXXVIII. *On the magnetic induction of crystals* (*Philosophical Transactions*, t. II, p. 543-587; 1858).

1860-63. G. Wiedemann. XXXIX. *Die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus*, 1re édition, Brunswick; 1860-1863.

1865. A. Beer ....... XL. *Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik*. Publié, après la mort de l'auteur, par J. Plücker, Brunswick; 1865.

1870. G. Kirchhoff... XLI. *Zur Theorie des in einem Eisenkörper inducirten Magnetismus* (*Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, Ergänzungsband, Bd. V, p. 1-15; 1870). Réimprimé dans (LV), p. 223.

1871. G. Green ...... XLII. *Mathematical Papers of the late George Green.* Londres; 1871.

1872. W. Thomson ... XLIII. *Démonstration d'une proposition sur l'induction magnétique des cristaux.* Publié pour la première fois dans (XLVIII) et réimprimé dans (LVIII), p. 485.

1872. W. Thomson ... XLIV. *Magnetic permeability and analogues in electrostatic induction, theory of heat, and fluid motion.* Publié pour la première fois dans (XLVIII) et réimprimé dans (LVIII), p. 487.

1872. W. Thomson ... XLV. *Diagramms of lines of force; to illustrate magnetic permeability.* Publié pour la première fois dans (XLVIII) et réimprimé dans (LXVIII), p. 492.

1872. W. Thomson ... XLVI. *Inductive susceptibility of a polar magnet.* Publié pour la première fois dans (XLVIII) et dans (LXVIII), art. xxxix.

1872. W. Thomson ... XLVII. *General problem of magnetic induction.* Publié pour la première fois dans (XLVIII) et dans (LVIII), art. xl.

1872. W. Thomson ... XLVIII. *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism.* 1re édition (Londres, 1872).

1872-74. G. Wiedemannn. XLIX. *Die Lehre vom Galvanismus.* IIe édition (Brunswick, 1872-1874).

1873. J.-C. Maxwell.. L. *Treatise of Electricity and Magnetism.* 1re édition (Londres, 1873).

1877. L. Weber...... LI. *Zur Theorie der magnetischen Induction.* Kiel, 1877. Compte rendu dans les *Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie*, t. II, p. 230.

1881. J.-C. Maxwell.. LII. *Treatise on Electricity and Magnetism.* 2e edition. Londres, 1881.

1881. F.-E. Neumann.. LIII. *Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, namentlich über die Theorie der magnetischen Induction.* Publié par C. Neumann. Leipzig; 1881.

1881. Greenhill...... LIV. *Sur le magnétisme d'un ellipsoïde creux* (*Journal de Physique pure et appliquée*, t. X, 294; 1881).

1882. G. Kirchhoff... LV. *Gesammelte Abhandlungen* (Berlin, 1882).



1882-85. G. Wiedemann. LVI. *Die Lehre von der Electricität* (Brunswick, 1882-1885).

1883-86. Mascart et Joubert... LVII. *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme* (Paris, 1882-1883).

1884. W. Thomson... LVIII. *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism* (2e édition, Londres, 1884).

1884. Resal.......... LIX. *Physique mathématique* (Paris, 1884).

1885. J.-C. Maxwell.. LX. *Traité d'Électricité et de Magnétisme* (traduit par G. Seligmann-Lui, Paris, 1885).

1886. É. Mathieu.... LXI. *Théorie du Potentiel et ses applications à l'Électrostatique et au Magnétisme*. IIe Partie. Applications (Paris, 1886).

# TABLE DES MATIÈRES

DU TOME DEUXIÈME.


| | Pages. |
|---|---|
| Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces gauches; par M. *Ch. Bioche* | A.1 à A.7 |
| Sur les lignes singulières des fonctions analytiques; par M. *Paul Painlevé* | B.1 à B.130 |
| Remarques sur la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques; par M. *Ch. Hermite* | C.1 à C.12 |
| Sur une équation différentielle du second ordre qui joue un rôle important dans la Mécanique céleste; par M. *F. Tisserand* | D.1 à D.25 |
| Recherches complémentaires sur le développement de la fonction perturbatrice; par M. *B. Baillaud* | E.1 à E.21 |
| Contributions à la théorie du cercle dans l'espace; par M. *G. Kœnigs* | F.1 à F.19 |
| Sur la transformation de l'intégrale elliptique de seconde espèce; par M. *Ch. Hermite* | G.1 à G.6 |
| Déplacement du cuivre par le zinc et le cadmium dans quelques solutions de sels de cuivre; par M. *A. Destrem* | H.1 à H.7 |
| Sur la transformation linéaire de la différentielle elliptique $\frac{dx}{\sqrt{X}}$; par M. *F.-J. Stieltjes* | K.1 à K.26 |
| De l'aimantation par influence; par M. *P. Duhem* | L.1 à L.139 |


## REVUE DE PHYSIQUE.


| | |
|---|---|
| Étude historique sur la théorie de l'aimantation par influence; par M. *P. Duhem* | 1 à 40 |


FIN DU TOME DEUXIÈME.

13791 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.